



REPUBLIKA SLOVENIJA
MINISTRSTVO ZA VZGOJO IN IZOBRAŽEVANJE



Zavod
Republike
Slovenije
za šolstvo

Gimnázium
Általános, klasszikus és szakmai gimnázium

MATEMATIKA

Kötelező tantárgy és érettségi (560 tanóra)
Tanmenet

Ljubljana 2023

Tanmenet

MATEMATIKA

Gimnázium; Általános, klasszikus és szakmai gimnázium

Kötelező tantárgy és érettségi (560 tanóra)

Tantárgyi bizottság, szerzők:

dr. **Amalija Žakelj**, Zavod RS za šolstvo/SZK Oktatási Intézete, elnök

mag. **Mirjam Bon Klanjšček**, Gimnazija Nova Gorica, tag

dr. **Marjan Jerman**, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, tag

Silva Kmetič, Zavod RS za šolstvo, tag

Samo Repolusk, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, tag

Andrej Ruter, Gimnazija Ravne na Koroškem, tag

A korszerűsítést végző tantárgyi bizottság a tanterv korszerűsítését az 1998-ban jóváhagyott gimnáziumi matematika tanterv alapján végezte el.

A tantervet bírálták:

dr. **Peter Legiša**, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

Darka Hvastja, Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

Szerkesztő: **Katja Križnik** és **Nataša Purkat**

A szlovén szöveget lektorálta: **Katja Križnik**

Magyar nyelvre fordította: **Tadina Bence Virág**

A magyar szöveg szaklektora: **Antolin Tibaut Helena**

A magyar szöveg nyelvi lektora: dr. **Merényi Annamária**

Kiadta: Ministrstvo za vzgojo in izobraževanje/Nevelésügyi és Oktatási Minisztérium, Zavod RS za šolstvo/SZK Oktatási Intézete

A Minisztérium részéről: dr. **Darjo Felda**

Az Intézet részéről: dr. **Vinko Logaj**

Ljubljana, 2023

A tantervet a Szlovén Köztársaság Közoktatási Szaktanácsa a 110. ülésén, 2008. február 14-én fogadta el.

URL hozzáférés: <http://eportal.mss.edus.si/msswww/programi2021/programi/index.htm>

Katalożni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v Narodni in univerzitetni knjižnici v Ljubljani

COBISS.SI-ID [142757123](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:si:hbz:5-142757123)

ISBN 978-961-03-0712-9 (Zavod RS za šolstvo, PDF)

Tartalomjegyzék

1. A tantárgy meghatározása	4
2. Általános célok/kompetenciák	5
3. Célok és tartalmak	8
3.1 A logika alapjai (7 óra).....	10
3.2 Halmazok (8 óra).....	11
3.3 Számhalmazok (55 óra)	12
3.4 Algebrai kifejezések, egyenletek, egyenlőtlenségek (30 óra)	20
3.5 Hatványok és gyökök (24 óra).....	22
3.6 Sík- és téreometria (32 óra).....	24
3.7 Mértani síkidomok és testek (34 óra).....	277
3.8 Sík- és térbeli vektorok (28 óra)	29
3.9 Derékszögű koordináta-rendszer a síkban (8 óra)	32
3.10 Függvények (190 óra).....	333
3.11 Kúpszeletek (20 óra).....	48
3.12 Sorozatok és sorok (32 óra).....	50
3.13 Differenciálszámítás (30 óra).....	52
3.14 Integrálszámítás (20 óra)	555
3.15 Kombinatorika (20 óra)	56
3.16 Valószínűségyszámítás (12 óra).. ..	58
3.17 Statisztika (10 óra).....	59
4. Elvárt eredmények	63
4.1 Tartalmi tudás.....	63
4.2 Procedurális tudás.....	65
5. Tantárgyközi kapcsolatok	67
5.1 A tantárgyközi kapcsolatok céljai és tevékenységei.....	67
5.2 A kompetenciák fejlesztése érdekében végzett tevékenységek	70
6. Módszertani útmutatók	73
6.1 Infokommunikációs technológia (IKT)	74
6.2 Házi feladatok.....	75
7. Az eredmények értékelése	76

1. A tantárgy meghatározása

A matematika tudomány és művészet egyben, amely az emberi elme kíváncsiságának és alkotóképességének az eredményeként jött létre. Képes feltárni a természetben lejátszódó folyamatok szépségét és a háttérben megbúvó lehetséges folyamatokat. Lényeges szerepe van, valamint támogatást nyújt az egyéb természettudományos, technikai és társadalomtudományi-humán szakterületek tekintetében is, ugyanis a matematika az emberi élet és alkotás valamennyi területén szerepet játszik. Jelenléte az infokommunikációs társadalom fejlődésével párhuzamosan más tantárgyi területeken már kevésbé látható. Bizonyos tevékenységek elvégzéséhez egyre kevésbé fontos a számtani műveletek rutinszerű használata, annál lényegesebb azonban a jelenségek megértése, a tantárgyköziségben betöltött szerepe, a matematikai tudás alkalmazása, valamint a problémamegoldás készsége.

A matematika a gimnáziumi képzésben az egyik alapvető tantárgy. A matematika tantárgynál a diák mindenekelőtt a matematikai alapfogalmakat és struktúrákat, a kritikus gondolkodásmódot, a különböző gondolkodási folyamatokat, az alkotói folyamatokat, a formális tudásanyagot és jártasságokat sajátítja el, továbbá megismerkedik a matematika gyakorlati felhasználásának lehetőségeivel.

A matematikai gondolkodásmód kialakításának legfontosabb vezérelve a matematikai objektumok között fennálló ok-okozati összefüggések felismertetése, valamint a logikai elvek alapján levonható következtetések beláttatása. A matematika tanítása ösztönzi a nem formális gondolkodásmódokat, például az intuitív megközelítést, ugyanis a matematika nem csupán utasítások gyűjteménye, amelyekkel a kitűzött feladatokat meg lehet oldani. A tanítás során a matematikai tartalmak és struktúrák felfedeztetése alkalmas arra, hogy a diákokat a pontosság, a rendszerezett munka, valamint a szisztematikus és kritikus gondolkodás felé irányítsa.

A gimnazista diákok számára a matematika oktatásának két fontos célja van: egyrészt az ismereteknek és képességeknek a hétköznapi élethelyzetekben stabil támogatást kell nyújtaniuk a megfelelő gondolkodáshoz, a döntéshozatalhoz és a többi középiskolai tantárgy elsajátításához, másrészt biztosítani kell a továbbtanuláshoz szükséges alapvető készségeket.

2. Általános célok/ kompetenciák

Az általános célok segítségével meghatározzuk a matematikatanulás és -tanítás alapvető célkitűzéseit. A matematikaórákon a diákoknak a következőket kell elvégezniük:

- fejleszteniük kell az absztrakt, a logikai és a geometriai gondolkodásukat;
- fel kell ismerniük azokat a kérdéseket, amelyekre a matematika választ tud adni;
- meg kell ismerniük a matematikának mint univerzális nyelvnek és eszköznek a jelentőségét;
- szóban, írásban és más kifejezési eszközökkel ki kell tudniuk fejezni magukat a matematika nyelvén;
- fel kell tudniuk használni a matematikát adott szövegkörnyezetben, és össze kell kötni a tudásukat a matematikán belül, valamint szélesebb körben is (tantárgyköziség);
- fel kell tudniuk tenni olyan kulcskérdéseket, amelyek a mindennapi életben megjelenő helyzetekből vagy matematikai problémák kutatásaiból adódnak;
- meg kell ismerniük a matematikát mint folyamatot, fejleszteni kell a kreativitásukat és a saját matematikai képességükbe vetett hitüket;
- meg kell ismerniük a különböző infokommunikációs technológiák (IKT) használatát, amely segítségükre lehet a hatékony tanulásban és problémamegoldásban;
- meg kell tudniuk ítélni, mikor érdemes használni az infokommunikációs technológiát (IKT), és ki kell fejleszteniük az interneten található információkhoz való kritikus viszonyukat.

A kompetenciák az adott helyzetben elsajátított megfelelő ismeretek, készségek és attitűdök ötvözeteként határozhatók meg (EU Hivatalos Lapja 394/10., 2006.). A matematikaoktatás az egyik alapvető gimnáziumi tantárgyakként fejleszti az alapvető matematikai kompetenciát, lehetővé teszi, hogy a matematikát az ötletek megfogalmazásának alapvető eszközeként, valamint olyan kulturális értéként fogjuk fel és fogadjuk el, amely hozzájárul az egyén önálló döntéshozatalához és ítélőképességéhez.

A matematikai kompetencia a különböző matematikai és interdiszciplináris problémák megoldásának a képességét jelenti, valójában a matematikai gondolkodásmód alkalmazását, a matematika kulturális értéként való felfogását, valamint a világ megtapasztalásának és értelmezésének készségeit foglalja magában. Fontos, hogy az intuitív megoldási folyamatokat logikai szabályok támasszák alá (gondolkodás, következtetések levonása, érvelés, modellezés, a problémák

megfogalmazása és megoldása). A matematikai kompetencia a következőket foglalja magában:

- matematikai fogalmak és az azok között fennálló összefüggések ismerete, megértése és felhasználása;
- következtetés, általánosítás, absztrakció és reflektálás konkrét és általános szinten,
- a matematikai nyelvezet megértése és felhasználása (olvasás, írás és matematikai kommunikáció, valamint matematikai források keresése és feldolgozása),
- adatok gyűjtése, rendezése, strukturálása és analízise, azok bemutatása, valamint az adatok és eredmények értelmezése, értékelése,
- a matematika hasznos eszközként és kulturális értéként történő elfogadása és szemlélése,
- az infokommunikációs technológia használata az új matematikai fogalmak elsajátításánál, a matematikai folyamatok leírásánál, kutatás a matematikai problémák megoldása közben, továbbá mindezek alkalmazása az egyéb természettudományos területeken,
- kutatások és problémamegoldás.

A matematikai kompetencia mellett, amely természetesen a leghangsúlyosabb, a tanárok megfelelő munkaformák kiválasztásával más kompetenciák fejlesztését is ösztönözhetik:

- az anyanyelven folytatott kommunikációt (hallott szöveg értése, beszédképesség, olvasott szöveg értelmezése és írásképesség);
- az idegen nyelveken folytatott kommunikációt (alapfokú matematikai szöveg bemutatása egy idegen nyelven);
- a tanulási készségek elsajátítását (saját tevékenységének megszervezése, felelősség vállalása a saját tudását illetően, önálló tanulás, a metakognitív tudás és a tanulási szokások fejlesztése),
- a kezdeményezőkézséget és vállalkozói kompetenciát (kreativitás, innováció és kockázatértékelés, döntéshozatal);
- a személyes tulajdonságokat (szociális érzékenység, társas értékek, érzelemszabályozás) és a pozitív önkép fejlesztését.

A többi természettudományos tantárggyal együtt ösztönözzük a természettudományos és a matematikai képességét a komplex gondolkodásmód kialakításának:

- Különböző forrásokból származó adatok keresése, feldolgozása és értékelése:
 - az információ szükségességének mérlegelése,
 - az adatkeresés, -feldolgozás és -értékelés módjainak tervszerű megismerése,
 - a megfigyelések/mérések mint adatforrások tervszerű megfigyelése, feljegyzése és alkalmazása,
 - a szimbolikus/grafikus megjelenítési formák megértésének és használatának fejlesztése,
- az IKT használata adatgyűjtés, -tárolás, -keresés és -bemutatás céljából;
- Az alapvető szakterminológia használata a jelenségek, folyamatok és törvényszerűségek leírására:
 - fejleszti a kísérletező képességet és a kutatási módszereket,
 - megtanulja kiválasztani a megfelelő és biztonságos eszközöket,
 - megérti a kísérletek tényezőit; meg tudja különböztetni az állandókat a változóktól,
 - képes a kapott eredmények megbízhatóságát mérlegelni,
 - elsjátítja a prezentációk során a következtetések érvekkel történő indoklását.
- Attitűd és döntéshozatal:
 - annak tudatosítása, hogy a természettudományok és a matematika milyen mértékben van hatással az életünkre és környezetünkre,
 - az egészség megőrzése érdekében a veszélyek felismerése és elkerülése,
 - felelősségteljes és aktív közreműködés a problémák megoldásánál és a fenntartható fejlődésben.

Valamennyi kulcskompetenciánál fontos tényező a kritikus gondolkodásmód, a kreativitás, a kezdeményezőkézség, a problémamegoldás, a kockázatértékelés, a döntéshozatal és az érzelmek konstruktív szabályozása.

A kompetenciák fejlesztésének tevékenységei a tanterv 5.2. *A kompetenciák fejlesztése érdekében végzett tevékenységek* című fejezetében kerültek részletes kidolgozásra.

3. Célok és tartalmak

A tantervben a célok és tartalmak nem időrendi felosztásban, hanem az egyes témakörök szerint kerültek feltüntetésre. Az egyes témaköröknél a javasolt óraszám és az osztályonkénti felosztás csak tájékoztató jellegű, mindaz a tanár számára nem kötelező érvényű. A témakörök felosztásáról a tanárok az iskolában működő munkaközösségekben hoznak döntést. A javasolt óraszám magában foglalja az új tudáselemek tárgyalását (elemi és magasabb szintű ismeretek), a gyakorlást, az IKT alkalmazását, a tudás ellenőrzését és az értékelést. Az egyes témáknál kijelölt célok és tartalmak a témakörön belül vagy a korábban tanított anyagokban már megfogalmazott célkitűzésekből, illetve tartalmakból következnek, egymásra épülnek, és egyre inkább elmélyítik az ismereteket. Az egyes témakörökben kitűzött célok a legfontosabb matematikai fogalmak és tartalmak elsajátítását irányozzák elő. A tanárok szakmai autonómiával rendelkeznek a tekintetben, hogy az éves tanmenetben és az óravázlatokban megtervezhetik az egyes témakörök elsajátítására szánt időkeretet, figyelembe véve a diákok képességeit, valamint a kiválasztott tanítási módokat, az ellenőrzés és értékelés módját. A fentiekhez hasonlóan a tanár a saját éves tanmenetében és óravázlataiban meghatározza a célok sorrendjét, miközben szem előtt tartja a kompetenciákat, a tantárgyköziséget és a kereszttanterviséget, vagyis az infokommunikációs technológiák, a környezeti nevelés, az egészségnevelés (a matematika a sportban), a pályaaorientáció, a fogyasztói tudatosságra és a közlekedésre nevelés, a könyvtárhasználat, továbbá az információkeresés (forrásfeldolgozás) kérdéseit stb.

A tanterv az ismereteket *elemi szintű (ESZ)* és *magasabb szintű ismeretekre (MSZ)*, valamint *választható tartalmakra (V)* bontja.

Az elemi szintű ismeretek (ESZ) azok, amelyek az általános műveltséghez minden diáknak számára szükségesek, ezért a tanárnak kötelező ezeket tárgyalni. A magasabb szintű ismeretek (MSZ) a tudás elmélyítését és bővítését szolgálják. A tanár a diákok képességeinek és érdeklődésének, valamint a gimnáziumi program szakmai követelményeinek a figyelembevételével tárgyalja azokat. A *Célok és tartalmak* fejezetben:

- álló betűs írással jelezzük az elemi szintű ismereteket,
- *dőlt betűs írással jelöltük a magasabb szintű tudástartalmakat.*

A választható tartalmak **(V)** túlmutatnak a gimnáziumi matematikai tananyag általános szintjén, és ezek a matematika iránt különös érdeklődést mutató diákok és osztályok esetében, illetve csak akkor kerülnek tárgyalásra, ha a tanítási folyamat megvalósítása elegendő időt hagy arra, hogy a tanár az ismereteket mélyrehatóan, és ne csak informatív szinten adja át. Mindezek kivitelezhetők a tanítás, szakkörök vagy projekthetek keretében. A *Célok és tartalmak* fejezetben:

- *a választható tartalmakat dőlt betűs írással és (V) jellel jelöltük.*
- A *tantárgyközi kapcsolatok*at és az *infokommunikációs technológia alkalmazásait* a módszertani útmutatókban *dőlt betűs* írással adtuk meg.

A tanár a tantervi célokat és az elvárható eredményeket a sajátos nevelési igényű diákok számára a diák képességeivel összhangban módosíthatja. Ennek szinkronban kell lennie A sajátos nevelési igényű diákokkal végzett munka utasításaival (SZKOI, 2003), illetve a diák számára készített, hivatalos végzésben előírt egyéni munkatervvel.

Érettségi

Az alapszintű érettségi vizsga az elemi célokat és tartalmakat öleli fel. A tantárgyi és a matematika érettségi vizsgabizottság konzultál arról, hogy az emelt szintű érettségien

melyik tudástartalmak kérhetők számon.

3.1 A logika alapjai (7 óra)

Célok

A diákok:

- leírják a kijelentést,
- meghatározzák a kijelentés logikai értékét,
- szimbólumokkal leírják az összetett kijelentést,
- kiszámítják az összetett kijelentés logikai értékét az elemi kijelentések minden értékénél,
- megállapítják két kijelentés egyenértékűségét.

Tartalmak

- Kijelentések és a köztük fennálló kapcsolatok
- Összetett kijelentések
- A műveletek sorrendje
- Tautológia
- Egyenértékű (ekvivalens) kijelentések

Módszertani útmutatók

A diákok a kijelentések logikai értékét igazságtáblázatokkal határozzák meg. Képesek a kijelentések igazságát formálisan, a következtetésekre fennálló szabályok segítségével eldönteni, és értik a halmazműveletek és a logikai műveletek közötti összefüggéseket. *Tantárgyközi kapcsolat alakítható ki a szlovén és a magyar nyelvvel (alá- és mellérendelések), valamint a*

filozófiával. A tananyagot I. osztályban javasolt tárgyalni.

3.2 Halmazok (8óra)

Célok

A diákok:

- ismerik az alapfogalmakat, képesek szimbólumokkal jelölni az elemek és halmazok közti viszonyokat,
- különböző módszereket alkalmaznak a halmazok szemléltetésére,
- műveleteket végeznek a halmazokkal,
- meghatározzák egy véges halmaz hatványhalmazát,
- ábrázolják két halmaz Descartes-féle szorzatának grafikonját,
- alkalmazzák két vagy három halmaz uniójának a számosságára vonatkozó, valamint a véges halmazok Descartes-féle szorzatának képletét.

Tartalmak

- Alapfogalmak: elem, halmaz, az elem halmazba való tartozása, részhalmaz, üres halmaz, alaphalmaz
- Szimbólumokkal való felírás
- Venn-diagram
- Metszet, unió, különbség, komplementer halmaz
- *A halmazműveletek tulajdonságai*
- Hatványhalmaz
- Descartes-féle szorzat
- A halmaz számossága

- *A hatványhalmaz számossága*

Módszertani útmutatók

A témakör tárgyalásánál a diákoknak az általános iskolában megszerzett ismereteire és képességeire alapozunk. A halmazok ábrázolását sokféle szemszögből tárgyaljuk: az elemek felsorolásával, az általános elem leírásával, Venn-diagrammon történő ábrázolással. Az adott véges halmaz hatványhalmazának meghatározását és az alapvető kombinatorikai tudáselemeket összekapcsoljuk. A Descartes-féle szorzat tárgyalásánál példát mutatunk a véges és végtelen halmazok szorzatára is. Ajánlatos, hogy a halmazműveletekkel kapcsolatos szabályokat a diákok minél önállóbban sajátítsák el, és a kombinatorikai és valószínűségszámítással kapcsolatos feladatokat logikai szitaformulával oldják meg. A témakört I. osztályban javasoljuk tárgyalni, a hatványhalmaz elemszámát akkor viszont még csak említjük meg, és majd a binomiális tétel tárgyalásánál vezessük le.

3.3 Számhalmazok (55 óra)

Természetes számok és egész számok

Célok

A diákok:

- ismerik a természetes számok jelentését és az egész számok bevezetésének a szükségességét, valamint alkalmazásuk néhány példáját,
- alkalmazzák a számtani műveleteket a természetes és az egész számok halmazán, valamint példák alapján indokolni tudják a műveletek tulajdonságait,
 - szemléltetik a természetes és az egész számokat a számegyenesen,

- *induktív módon következtetnek, általánosítanak, az általánosítást bizonyítják, illetve cáfolják, és teljes (matematikai) indukció segítségével bizonyítanak,*
 - az egész számokra alkalmazzák a decimális helyiértékes írásmódot,
 - megindokolják és alkalmazzák az alapvető oszthatósági szabályokat,
 - ismerik és alkalmazzák az oszthatósági reláció tulajdonságait,
- meghatározzák két vagy több egész szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét,
 - alkalmazzák az egész számok maradékos osztásának alaptételét,
 - *alkalmazzák az euklidészi algoritmust a legnagyobb közös osztó keresésére,*
 - *nehezebb feladatokban alkalmazzák a $Dv = ab$ kapcsolatot,*
 - *el tudják végezni a tízes és a kettes számrendszer közti átalakítást.*

Tartalmak

- A számtani műveletek és tulajdonságaik
- Prímszámok és összetett számok
- *A teljes (matematikai) indukció*
- Decimális helyiértékes írásmód
- A 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal, 8-cal, 9-cel és 10-zel való oszthatóság kritériumai
- Az oszthatósági reláció
- A legnagyobb közös osztó és a legkisebb közös többszörös
- A maradékos osztás alaptétele

- *Az euklidészi algoritmus, valamint a D és a v közti kapcsolat*
- *A tízes számrendszer*
- *A kettes számrendszer*

Módszertani útmutatók

A tanár a témakör tárgyalásakor a diákok általános iskolában megszerzett ismereteire és képességeire alapoz. A prímszámok keresésénél bemutatja az erathosztenészi szita módszerét. *A prímszámok tárgyalását össze lehet kötni az IKT-val (pl. internetes keresés végezhető az aktuális legnagyobb prím megkeresésére).* Az intuitív következtetéseket teljes indukcióval bizonyítjuk be. A témákat – a teljes indukción kívül – I. osztályban javasolt tárgyalni.

A diákok az egész számok bevezetésének szükségességét és alkalmazásukat a hétköznapi életből vett példák segítségével indokolják. A számtani műveletek tulajdonságainak tárgyalásánál hangsúlyozni kell az egész számok és a természetes számok halmazán végrehajtott műveletek közös tulajdonságait. Példák segítségével el kell magyarázni a matematikában a mínuszjel többféle alkalmazását. A diákok meglévő tudására alapozzuk a decimális helyiértékes írásmódot, és azt szöveges feladatokkal ellenőrizzük. Az oszthatósági szabályok közül néhányat levezetünk, a többi esetében viszont teret engedünk annak, hogy a diákok önállóan jöjjenek rá az összefüggésekre. Az oszthatósági és az egyéb relációk, valamint azok tulajdonságai is bemutatásra kerülhetnek. A legnagyobb közös osztó és legkisebb közös többszörös esetében a D és v meghatározása és megértése a leghangsúlyosabb, hiszen ezek alapos elsajátítása kulcsfontosságú az algebrai kifejezésekkel végzett műveleteknél is. A maradékos osztás alaptételének a racionális törtfüggvényeknél történő alkalmazása miatt már az egész számoknál, de legkésőbb a racionális számoknál meg kell mutatni a $14 : 3 = 4 + \frac{2}{3}$ felírási módot az

egyszerűsített $14 : 3 = 4$, maradék 2 helyett. Az euklidészi algoritmust nem szükséges általános alakjában is bebizonyítani. A tanár az érdeklődés felkeltésére a számelmélet témaköréből mutasson be megoldatlan kérdéseket. Hangsúlyozni kell a kettes számrendszer jelentőségét, és eközben tantárgyközi kapcsolatot lehet teremteni az informatikával. A tartalmakat I. osztályban javasolt tárgyalni.

Racionális számok

Célok

A diákok:

- ismerik és megindokolják a racionális számok bevezetésének szükségességét,
- szemléltetik a racionális számokat a számegyenesen,
- műveleteket tudnak végezni a racionális számokkal,
- indokolják és alkalmazzák a racionális számok tizedes törttel való felírását, és megkülönböztetik a tizedes és egyéb törteket,
 - műveleteket tudnak végezni tizedes törtekkel,
- mindennapi feladatokban használnak törteket és százalékokat, valamint a százalékszámítást és helyesen használják a számológépet.

Tartalmak

- A számtani műveletek és ezek tulajdonságai
- A racionális számok tizedes tört alakja
- Részek és százalékok
- Százalékszámítás

Módszertani útmutatók

A témakör tárgyalásánál a tanár a diákok általános iskolában megszerzett ismereteire és képességeire alapoz. Felméri és továbbfejleszti a diákok racionális számokról alkotott ismereteit. Segítséget nyújt számukra, hogy meg tudják különböztetni a racionális számok és a törtek fogalmát. A racionális számok tárgyalásánál hangsúlyozza, hogy minden racionális számnak több megjelenítési módja, illetve alakja van. A szakasz adott arányos felosztását az euklidészi geometriának a párhuzamos szelők tételével támasztja alá. Hangsúlyozni kell, hogy a racionális számok halmazát a véges tizedes tört és a végtelen szakaszos tizedes tört alakú számok alkotják. Fel kell hívni a diákok figyelmét a különböző felírási módokra (a tizedes törtek esetében a véges és a végtelen szakaszos tizedes tört alakok ekvivalenciájára). A tizedes jegyek leírásánál hangsúlyozni kell, hogy többféle jelölési mód létezik (Szlovéniában tizedesvessző, az USA-ban pl. tizedespont szerepel). A tanár a későbbiekben a százalékszámítás kérdéskörét a kamatoskamat-számítással építi tovább. A diákoknak a feladatok megoldásakor képesnek kell lenniük a mennyiségek nagyság szerinti megbecslésére. *A százalékszámítás tanítása tantárgyközi kapcsolatokkal, pl. a kémiával (kémiai számítások) vagy projektmunka keretében tervezhető meg. Ezeknél a tartalmaknál fontos a számológép megfelelő használata is. A tartalmakat I. osztályban javasolt tárgyalni.*

Valós számok

Célok

A diákok:

- ismerik és meg tudják indokolni a valós számok bevezetésének szükségességét,
- fel tudnak sorolni néhány példát irracionális számra,
- Pitagorasz-tétel segítségével konstruálnak néhány irracionális számot négyzetgyök alakban,

- a számegyeneset mint valós tengelyt értelmezik,
- kerekítik a tizedes törteket,
- összekapcsolják a valós számok abszolút értékének mértani és analitikus bemutatását,
- egyszerűbb alakra hozzák az abszolút értéket tartalmazó kifejezéseket, és megoldanak egyszerű egyenleteket,
- *megoldanak a valós számok abszolút értékeit tartalmazó egyszerű egyenlőtlenségeket,*
- összehasonlítják az abszolút és a relatív hiba jelentését, és megítélik két adat összegének, különbségének, szorzatának és a hányadosának abszolút és relatív hibáját.

Tartalmak

- Irracionális számok
- Valós számok a számegyenesen (a valós tengelyen)
- Intervallumok
- A véges tizedes tört megközelítő értéke
- A valós szám abszolút értéke és tulajdonságai
- Egyenletek abszolút értékkel
- *Egyenlőtlenségek abszolút értékkel*
- Az abszolút és a relatív hiba

Módszertani útmutatók

Az irracionális számok bevezetésekor olyan valódi, hétköznapi szituációkat kell

keresni, amelyek bemutatásához nem elegendők a racionális számok. Bebizonyítjuk a $\sqrt{2}$ irracionális voltát, valamint elmagyarázzuk az ellentmondáshoz vezető (indirekt) bizonyítás módszerét. A valós számok tizedes tört alakja nem egyértelmű: pl. $1 = 0,9999\dots = 1,0000\dots$. A racionális számok számegyenesen törtéző megjelenítése a Pitagorasz-tétel mellett a természetes számok négyzetgyökének a magasságtételből kiinduló ábrázolásával is megmutatható, mindkettőt az euklidészi geometria tárgyalásánál bizonyítjuk. Elsőként az abszolút érték analitikus tárgyalására kerül sor, ezután annak geometriai jelentése (a tartalmak összekapcsolása) következik, miközben mindezt a távolságról az általános iskolából már megtanult tudással kötjük össze. Bemutatjuk az abszolút érték fogalmának felhasználását a mindennapi életben. *Az abszolút és relatív hiba tárgyalását tantárgyközi kapcsolattal (fizika) és az adatfeldolgozás módszerével érdemes megtervezni.* Az abszolút és relatív hibák szorzata, valamint hányadosa a diákok képességeit és a tanítási programban foglaltakat figyelembe véve kerül tárgyalásra. A tartalmakat I. osztályban javasolt tárgyalni.

Komplex számok

Célok

A diákok:

- ismerik és megindokolják a komplex számok bevezetésének szükségességét,
- szemléltetik a komplex számot a komplex számsíkon,
- analitikus és grafikus módszerrel képesek összeadni, valamint egymásból kivonni a komplex számokat,
- komplex számokkal szorzásokat végeznek,
- levezetik az i szám hatványainak kiszámítási szabályát,

- meghatározzák a konjugált szám analitikus és mértani jelentése közti kapcsolatot,
- meghatározzák a komplex szám abszolút értékének analitikus és mértani jelentése közti kapcsolatot,
- levezetik és alkalmazzák a komplex számok osztásának szabályát,
- kiszámítják a komplex szám reciprokát,
- meghatározzák az egyenletek komplex megoldásait is,
- összehasonlítják a polárkoordináta-rendszert a derékszögű koordináta-rendszerrel, és képesek áttérni az egyik koordinátáról a másikra,
- felhasználják a komplex számok trigonometrikus alakját a komplex számok hatványozásánál és gyökvonásánál.

Tartalmak

- A komplex számok mértani ábrázolása komplex számsíkon
- Számítási műveletek és ezek tulajdonságai
- Valós együtthatós egyenletek megoldása
- *Valós együtthatós polinomegyenletek megoldása*
- *A komplex számok trigonometrikus alakja (polárkoordináta-rendszer, De Moivre-képlet...) (V)*

Módszertani útmutatók

A témakör tárgyalására a vektorok elsajátítása után (mintegy modellezve a vektorok felhasználását) és a másodfokú függvény tárgyalása előtt kerülhet sor. A diákok maguk kell, hogy a komplex számok bevezetésének szükségességének okait és mértani szemléltetésük módját megjelöljék. A hangsúly a komplex számok számtani műveleteire kerül. A komplex számok abszolút értékét összehasonlítjuk a valós számok abszolút értékének definíciójával és

a vektor hosszúságával. A diákok önállóan vezessék le a komplex számok számítási szabályait. A hangsúly a folyamatok megértésén, és ne a képletek megtanulásán legyen. A $ax^2 + bx + c = 0$, $D \geq 0$ alakú másodfokú egyenletek tárgyalása a másodfokú egyenletek elsajátítása után következzen. A tartalmakat nagyobb részben a II., *a komplex számok trigonometrikus alakját viszont a III. osztályban* javasoljuk tárgyalni.

3.4 Algebrai kifejezések, egyenletek és egyenlőtlenségek(30 óra)

Célok

A diákok:

- összehasonlítják, valamint megkülönböztetik a kifejezés és az egyenlet, továbbá a változó és az ismeretlen alakját és jelentését,
- összeadják és szorozzák az algebrai kifejezéseket,
- alkalmazzák és megindokolják a kéttagú algebrai kifejezés négyzetre és köbre emelésének szabályait,
- Pascal-féle háromszög segítségével meghatározzák a kéttagú algebrai kifejezések magasabb rendű hatványait, valamint ezeket alkalmazzák is,
- felismerik és alkalmazzák az adott kifejezés megfelelő tényezőkre való bontásának módját: kiemelés, a négyzetek különbsége, a köbök összege és különbsége, Viète-képletek, négytagú algebrai kifejezés tényezőkre bontása,
- az $a^n \pm b^n$ kifejezések tényezőkre bontása,
- műveleteket végeznek az algebrai törtekkel (mind a négy számtani műveletet és a zárójeles kifejezéseket is ismerik),
- alkalmazzák az ekvivalens átalakítások szabályait az egyenletek esetében, és ezeket

az egyenleteket ügyesen megoldják,

- felismerik és megoldják a lineáris egyenleteket,
- felismerik és megoldják a gyöktényezős alakú egyenleteket,
- helyesen kifejezik az ismeretleneket a különböző fizikai és kémiai egyenletek esetében,
- *elemzik a paraméteres lineáris egyenleteket,*
- alkalmazzák az ekvivalens átalakítások szabályait az egyenlőtlenségek esetében, és képesek indokolni az egyenlőtlenség megoldásának lépéseit,
- felismerik és megoldják a lineáris egyenlőtlenséget,
- *elemzik az egyszerű paraméteres lineáris egyenlőtlenségeket.*

Tartalmak

- Számítási műveletek algebrai kifejezésekkel
- Algebrai kifejezések hatványozása
- Algebrai kifejezések tényezőkre bontása
- Számítási műveletek törtekkel
- Egyenletek és egyenlőtlenségek
- Lineáris egyenlet
- Gyöktényezős alakú egyenlet
- *Paraméteres lineáris egyenlet*
- Lineáris egyenlőtlenség
- *Paraméteres lineáris egyenlőtlenség*

Módszertani útmutatók

Egyes algebrai műveletek geometriai ábrázolással is indokolhatók (pl. a kéttagú kifejezés négyzete). A diákok rávezetéssel maguk is felfedezhetik a Pascal-háromszög néhány tulajdonságát. A tanítási tartalom továbbépítése a binomiális tételnél lehetséges. Lényeges, hogy ne legyen túl nagy hangsúly a bonyolult algebrai törtekkel végzett műveleteken. *Javasolt tantárgyközi kapcsolatot teremteni a fizikával (műveletek egységekkel).* Az egyenletek és egyenlőtlenségek tárgyalása a lineáris függvény keretei közt is történhet. A legfontosabb az ekvivalens átalakítások szabályainak elsajátítása. *A tanár a fizikában (egyenletes és egyenletesen gyorsuló mozgás) és kémiában használatos egyenleteket válasszon. A tananyag tárgyalása tantárgyközi kapcsolatok bemutatásával történik. A tartalmak tárgyalása I. osztályban javasolt.*

3.5 Hatványok és gyökök (24 óra)

Célok

A diákok:

- indokolják és alkalmazzák a természetes kitevőjű hatványokkal kapcsolatos műveletek szabályait,
- indokolják és alkalmazzák az egész kitevőjű hatványokkal kapcsolatos műveletek szabályait, és ezeket összehasonlítják a természetes kitevőjű hatványokkal kapcsolatos műveletek szabályaival,
- megmagyarázzák az a^{-1} és az a^{-n} kifejezések jelentését,
- alkalmazzák a négyzetgyök gyökvonási szabályait,
- megoldják az $x^2 = a$, $a \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ alakú másodfokú egyenleteket tényezőkre bontással és gyökvonással,

- összehasonlítják és indokolják az egyszerű $x^n = a$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ alakú egyenletek megoldását a valós számok halmazán gyökvonással és tényezőkre bontással,
- megmagyarázzák és alkalmazzák a $\sqrt[n]{x^2} = \sqrt[n]{x^2}$ kapcsolatot,
- pontosan kiszámítják fejben és számológép segítségével a valós számok köbgyökeit,
- megkülönböztetik a valós szám n -edik gyökének létezésére vonatkozó feltételeket (a kitevő és az alap függvényében),
- ügyesen alkalmazzák a számológépet az n -edik gyökök kiszámítására,
- átalakítják az n -edik gyök alakot racionális kitevőjű hatványalakra,
- összekapcsolják és összehasonlítják az n -edik gyököket tartalmazó feladatok és a racionális kitevőjű hatványokkal kapcsolatos példák megoldási eljárásait,
- *felismerik az irracionális egyenletet, megoldják azt, valamint indokolják az irracionális egyenlet megoldásának lépéseit, azután értelmezik a megoldásokat.*

Tartalmak

- Természetes kitevőjű hatványok
- Egész kitevőjű hatványok
- n -edik gyökök
- Racionális kitevőjű hatványok
- *Irracionális egyenletek*

Módszertani útmutatók

A hangsúly a természetes kitevőjű hatványműveletek szabályainak megértésére (és azok levezetéseire) kerüljön. A négyzetgyökök tárgyalását az abszolút értékkel kell összekötni. A gyököket egyértelműen szükséges definiálni. Az egyenlet megoldásánál javasolt a

szorzattá alakítás. A köbgyök a kocka térfogatával való kapcsolata miatt már az I. osztályban tárgyalandó. *A diákok a négyzetgyökök, köbgyökök és n -edik gyökök számításánál megtanulják a számológép ügyes használatát.* Hangsúlyozni kell, hogy a racionális kitevőjű hatványok műveleteinek szabályai megegyeznek az egész kitevőjű hatványok szabályaival (de az indoklásuk más). Nem azon van a hangsúly, hogy a diákok minél több feladatot megoldjanak, hanem a gyöktényező alak racionális kitevőjű hatványalakra alakításának az elsajátításán. *A hatványok alkalmazására a fizikából és a kémiából (egységek közti átváltás) kell példákat mutatni.* Négyzetgyök és köbgyök segítségével irracionális egyenleteket oldunk meg, és ebben az esetben sem a feladatok nehézségi foka, hanem az egyenletek (nem)ekvivalens átalakításának a megtanulása a lényeges, amelynek segítségével az ellenőrzés és a további feltételek feljegyzésének fontosságát lehet érzékeltetni. A tartalmak közül I. osztályban az n -edik gyököket, II.-ban a racionális kitevőjű hatványokat, III. osztályban pedig az irracionális egyenleteket javasolt tárgyalni.

3.6 Sík- és térgeometria (32 óra)

Célok

A diákok:

- elsajátítják az elemi euklidészi geometria fogalmait,
- kifejlesztik geometriai szemléletüket, és gyakorlatban megismerik a matematikaelmélet alapvető mértékadó szabályait,
- ismerik a definíciókat, és alkalmazzák azokat a mértani elemek tulajdonságainál,
- alkalmazzák a háromszög belső és külső szögei közti, valamint a háromszög oldalai és szögei közti összefüggéseket,

- alkalmazzák az azonos körívhez tartozó középponti és kerületi szögek közti kapcsolatot,
- megkülönböztetik egymástól az egybevágó és a hasonló háromszögeket,
- alkalmazzák a derékszögű háromszögre vonatkozó tételeket,
- megszerkesztik geometriai eszközökkel a mértani elemeket, *valamint dinamikus geometriai programokkal is el tudják végezni ezt,*
- elsajátítják és alkalmazzák a tetszőleges háromszög oldalai és szögei közti kapcsolatokat, használni tudják a koszinusz- és szinusztételt,
- az IKT alkalmazásával képesek geometriai problémákat megvizsgálni,
- kifejlesztik a térbeli pontok, egyenesek és síkok közt fennálló viszonyokra vonatkozó látásmódjukat.

Tartalmak

- Pontok, egyenesek és körök a síkon
- Távolság, szakasz és a szakasz meghosszabbításával keletkező egyenes, szimmetriatengely, félegyenes, szög
- A szögek fajtái és a szögek közti viszonyok
- Háromszög, sokszög
- A háromszög nevezetes pontjai
- Távolságtartó transzformációk és az egybevágóság
- Párhuzamos eltolás, tükrözés, elforgatás, a háromszög körüljárási iránya
- Merőleges vetület
- A középponti és a kerületi szögek

- Szögek a félkörben
- Középpontos nagyítás/zsugorítás, hasonlóság
- A derékszögű háromszög nevezetes tételei
- Paralelogramma, rombusz, trapéz
- Szerkesztési feladatok
- A koszinusz- és a szinusztétel
- *A tér ponthalmazai*
- Az egyenesek és a síkok párhuzamossága, valamint merőlegessége a térben
- Az egyenes merőleges vetülete a síkra

Módszertani útmutatók

Ezek a tartalmak nagyon jó alkalmat biztosítanak arra, hogy a diákok megismerkedhessenek a matematikaelmélet alapelveivel, valamint a következtetések és bizonyítások alapvető szabályaival. A tanár a bizonyításokat – a diákok felkészülési szintjét figyelembe véve – bemutathatja formálisan vagy intuitív módon. A koszinusz- és a szinusztételt a vektorműveletek nélkül is le lehet vezetni: a koszinusztétel a Pitagorasz-tétel, a szinusztétel pedig a középponti és kerületi szögek közti összefüggés segítségével. A térbeli ponthalmazok kölcsönös helyzetének tárgyalása intuitíven (grafikus módon) fejleszthető. Ha tudjuk, hogy későbbiekben tárgyalásra kerülnek az analitikus geometriának legalább az alapjai, úgy a síkok és egyenesek kölcsönös helyzete a normálisok és irányvektorok segítségével, formális módon is leírható **(V)**. *Ajánlott a dinamikus geometriai programok és más e-tananyagok használata, pl. a mértani fogalmak közötti összefüggéseknél és a háromszög nevezetes pontjainál.* A tartalmakat I. vagy II. osztályban javasolt tárgyalni.

3.7 Mértani síkidomok és testek (34 óra)

Célok

A diákok:

- ki- és továbbfejlesztik geometriai szemléletüket,
- az egyes mennyiségek kifejezésére a megfelelő képletet alkalmazzák,
- megbecslik és megítélik a kapott értékeket, ügyelnek a mértékegységek pontosságára,
- alkalmazzák a síkgeometria területén elsajátított tudást, és megoldják azokat a problémákat, amelyek a háromszögbe és a háromszög köré írt kör sugarával kapcsolatosak,
- leírják a mértani test tulajdonságait,
- alkalmazzák a mértani testek modelljein a szögfüggvényekről és a geometriáról elsajátított tudást,
- megoldanak a testek felszínével és térfogatával kapcsolatban geometriai problémákat, valamint kritikus módon megbecslik, illetve megítélik a kapott eredményeket és mértékegységeket,
- *megoldanak a ferde és csonka testeket vizsgáló geometriai problémákat,*
- *meghatározzák az elforgatás tengelyét, és elemzik a kapott forgástestet a kiválasztott tengely szempontjából,*
- *megoldanak a forgástestek térfogatával kapcsolatos problémákat,*
- felismerik a geometriai problémát, bemutatják, továbbá megállapítják, melyik fogalmakkal és változókkal, valamint ezek közti kapcsolatokkal lehet megoldani, majd megoldják a problémát, az eredményt és az odavezető utat bemutatják, végül gondolkodnak ezek helyességéről,

- geometriai problémák megoldásánál önállóan kiválasztják és alkalmazzák a megfelelő stratégiákat, valamint összekapcsolják a sík- és a térbeli geometria tartalmait,
- megoldanak geometriai problémákat a trigonometria segítségével.

Tartalmak

- A mértani síkidomok területe, Héron képlete
- A háromszögbe írt kör és a háromszög köré írt kör sugara
- Mértani testek: hasáb, henger, gúla, kúp, gömb
- Az egyenes hasáb, henger, gúla, kúp és gömb felszíne és térfogata
- *Cavalieri-elv*
- *Ferde testek*
- *Forgástestek*
- Geometriai matematikai problémák

Módszertani útmutatók

A tartalmak tárgyalása során javasolt a mértani testek modelljeit vagy megfelelő interaktív programokat használni. A tartalom különféle, már előzőleg elsajátított matematikai ismerettel kapcsolható össze: ilyen a mérés (a modellek mérése) és a mértékegységek átváltása, a trigonometria és a síkidomok területe – a testek felszínének kiszámítása a testhálót alkotó síkidomok területének segítségével. Cél, hogy a diákok saját környezetükben önállóan keressenek példákat testekre, és kiszámítsák azok felszínét. A diákoknak a geometriai feladatok megoldása során el kell sajátítaniuk a tervezés készségét. A geometriai és más problémák megoldásával, valamint a hétköznapi életből vett példák bemutatásával egyrészt fejlesztjük a diákok

tudását matematikai szövegkörnyezetben, másrészt megtanítjuk nekik a stratégiai gondolkodás alapvető eszközeit (vázlatkészítés, az összefüggések analízise, a síkgeometria fogalmainak és a mértani testek tulajdonságainak összekapcsolása...). Ajánlatos, hogy a diákok önállóan kísérletezzenek, és *eközben alkalmazzák a dinamikus geometriai programokat is, használják a számológépet és az IKT-i eszközöket. Javasolt tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a kémiával (molekulák, kristályok)*. A tartalmakat II. vagy III. osztályban célszerű tárgyalni.

3.8 Sík- és térbeli vektorok (28 óra)

Célok

A diákok:

- megrajzolják a vektorokat, grafikus módon összeadják és komponensekre bontják azokat, valamint ezeket számmal (skalárral) szorozzák,
- elsajátítják a vektorszámítást grafikusan és analitikusan,
- meg tudják állapítani, hogy a vektorok egy egyenesen vagy egy síkban vannak-e,
- *megítélik a vektorok lineáris függetlenségét,*
- műveleteket végeznek a koordinátákkal (komponensekkel) felírt vektorokkal,
- kiszámítják a vektorok által közbezárt szöveget, a vektor hosszát, valamint a vektor merőleges vetületét,
- indokolják a vektorok merőlegességét és párhuzamosságát,
- értik a merőlegességet a térben,
- *megértik a vektoriális szorzat fizikában használatos magyarázatát,*
- *megismerik a térbeli analitikus geometria alapjait (V).*

Tartalmak

- A vektorok definiálása
- Összeadás, szorzás skalárral (erők) – grafikus szemléltetés
- Kollinearitás, komplanaritás – grafikus szemléltetés
- A vektorok felírása a bázis koordinátaival (az erő felbontása komponensekre), merőleges vetület – grafikus szemléltetés
- A vektorok lineáris kombinációja
- *A vektorok lineáris függetlensége*
- A sík és a tér bázisa
- A derékszögű koordináta-rendszer a síkban és a térben; a pont helyvektora
- A vektorok felírása komponensekkel
- Műveletek komponensekkel felírt vektorokkal
- A vektor merőleges vetülete egy másik vektorra
- Skaláris szorzat, a két vektor által közbezárt szög és a vektor hossza
- *A vektorszámítás alkalmazása a háromszögnél és a paralelogrammánál, arányok, súlypont*
- A skaláris szorzat és a koszinusztétel összefüggése
- *Vektoriális szorzat, a paralelogramma területe (**V**)*
- *Az egyenes és a térbeli sík parametrikus egyenlete (**V**)*
- *A sík normálegyenlete (**V**)*
- *Egyenesek és síkok metszetei (**V**)*

Módszertani útmutatók

A sík- és térgeometriában a bázis fogalmát elegendő a kollinearitás és a komplanaritás fogalmain keresztül bevezetni. *A vektorok általános lineáris függőségének és függetlenségének tárgyalása során is erősen támaszkodni szükséges a sík- és térgeometriai szemléletre.* A pontok helyvektorainak kifejezését összekötjük a már tanult Descartes-féle koordináta-rendszer ismeretével. A bázis fogalmának tárgyalásakor javasolt hangsúlyozni a fizikában használatos jelentését, pl. az erők komponensekre bontását. Ki kell emelni a skaláris szorzat komponensenkénti kiszámítása és a skaláris szorzat geometriai jelentése közti összefüggést. Ajánlatos bemutatni a vektorok által közbezárt szög tulajdonságainak felhasználását és a háromszög magasság talppontjait megadó koordináták kiszámítását, valamint ezeknek *a fizika tantárggyal való kapcsolatát.* A koszinusztételt levezethetjük vektorokkal is. *Tantárgyközi kapcsolatok alakíthatók ki a fizikával (az erők komponensekre bontása, a munka definíciójánál a skaláris szorzat...).* *Javasoljuk dinamikus geometriai programok és más e-tananyagok alkalmazását.* A tartalmak a program szakiránya és szükségletei szerint intuitív módon már az I. osztályban tárgyalhatók, egyébként pedig a II. osztályban és a későbbiekben ajánlatos. *A vektoriális szorzatot a technikai és természetismereti tagozatokon érdemes bevezetni, és hangsúlyozni kell annak geometriai és fizikai értelmezését (pl. nyomaték, a mágneses tér erőhatása árammal átjárt vezetőre, a mágneses térben mozgó test töltésre ható erő).* *A tér analitikus geometriája választható tartalom, és tanítása a speciális matematika tagozatos osztályokban javasolt.* *Amennyiben tárgyaljuk ezt, úgy célszerű, hogy az egyenesek és síkok kölcsönös helyzetét (a 3. 6. rész) az egyenesek irányvektorainak, valamint a síkok normálvektorainak összefüggése segítségével mutassuk be, illetve ezzel egészítsük ki a már ismert tartalmat (V).*

3.9

Derékszögű koordináta-rendszer a síkban (8óra)

Célok

A diákok:

- alkalmazzák a derékszögű koordináta-rendszert a síkban,
- leolvassák és megrajzolják adott feltételek mellett a sík ponthalmazait,
- alkalmazzák a rendezett számpárok és a síkbeli pontok közti kapcsolatot,
- kiszámítják a pontok távolságát és a háromszög területét, valamint felhasználják a képleteket a matematikai problémák megoldásakor.

Tartalmak

- Ponthalmazok a síkban
- Pontok távolsága a sík koordináta-rendszerében
- A háromszög területe

Módszertani útmutatók

A témakör tárgyalásánál a diákoknak az általános iskolában megszerzett ismereteire és képességeire alapozunk. A tanárnak a diákok számára olyan tevékenységeket kell terveznie, amelyek keretei közt, egyéni házi feladatok segítségével felidézhetik és kibővítik tudásukat. A tartalmakat I. osztályban javasolt tárgyalni, a háromszög területét és körüljárási irányát később is lehetséges (pl. egyenesek hajlásszöge, vektorok, geometria).

3.10 Függvények (190óra)

Célok

A diákok:

- elsajátítják és alkalmazzák a függvény definícióját,
- elsajátítják és alkalmazzák a következő fogalmakat: a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete, injektív, szürjektív, bijektív függvény,
- ábrázolják és elemzik a függvény grafikonját párhuzamos eltolás és nyújtás segítségével,
- alkalmazzák a párhuzamos eltolást, a tükrözéseket és a nyújtásokat problémák megoldása során,
- megállapítják az inverz függvény létezését egyszerű példákon, felírják ennek a hozzárendelési szabályát, és ábrázolják az adott függvény inverz függvényének grafikonját,
- *elemzik a hozzárendelési szabályt, majd ábrázolják az abszolút értéket tartalmazó függvény grafikonját,*
- ábrázolják a lépcsőzetesen növekvő/csökkenő függvény grafikonját,
- képesek elmagyarázni olyan megfelelő példák segítségével a függvény adott pontjában vett határértékének fogalmát, amelyek a függvény grafikonnal, táblázattal, illetve analitikusan bemutatott prezentációi,
- kiszámítják a függvény határértékét, és megmagyarázzák a kapott határérték jelentését,
- megmagyarázzák a végtelenben vett határérték jelentését,
- megkülönböztetik a függvény végtelenben vett határértékét magától a végtelen

határértéktől,

- alkalmazzák a határértéket a függvény aszimptotájának kiszámításánál,
- felismerik a grafikonjával megadott függvény folytonosságát,
- *megmagyarázzák a folytonosságot az adott függvény hozzárendelési szabálya alapján,*
- *meghatározzák azokat az intervallumokat, amelyeken az adott függvény folytonos,*
- *következtetnek a konkrét folytonos függvény tulajdonságaira egy zárt intervallumon,*
- *megadják előre megadott pontossággal, technikai eszközök segítségével a görbe zérushelyét vagy adott pontját.*

Tartalmak

- A függvény definíciója
- A valós függvény definíciója és az egyváltozós valós-valós függvények tulajdonságai (injektív, szürjektív, bijektív, növekvő, csökkenő, páros, páratlan...)
- Összetett függvények (a függvények kompozíciója)
- Inverz függvény
- A sík transzformációi
- A függvény határértéke
- Speciális határértékek
- *A függvények folytonossága*
- A zárt intervallumon vett folytonos függvények tulajdonságai
- *Zérushelyek keresése technológiai eszközök segítségével*
- *A határértékszámítás numerikus módszerei (V)*

Módszertani útmutatók

A témakör tárgyalásánál a diákoknak az általános iskolában megszerzett ismereteire és képességeire alapozunk, majd azt építjük tovább (a függvény példája a már ismert egyenes és fordított arányosság fogalmaival szemléltethető). A különböző függvények más tantárgyi területekről vagy a mindennapi életből vett valós események modelljeként prezentálhatók. Külön mutatjuk be a lépcsőzetesen növekvő/csökkenő függvényt (pl. parkolási díj, adóskála). Az egyes függvénytípusok tárgyalása előtt át kell ismételni a függvények legfontosabb tulajdonságait. *Cél, hogy a diákok minél több önálló munkával, megfelelő számítógépes programok és e-tananyagok segítségével sajátítsák el a grafikonok párhuzamos eltolásait, nyújtásait/zsugorításait és tükrözéseit.* Lényeges, hogy a határérték alapvető matematikai fogalmának megértése fontosabb a függvények bonyolult határértékeinek kiszámolásánál. *A határérték és a folytonosság fogalmi dinamikus geometriai és táblázatkezelő programok használatával (IKT) tehető érthetőbbé.* A diákok példák segítségével megvizsgálhatják a zárt intervallumon folytonos függvények tulajdonságait, és *egy kiválasztott numerikus módszerrel megkereshetik a folytonos függvények adott intervallumon lévő zérushelyeit.* Az injektivitás, bijektivitás és szürjektivitás fogalmainak tárgyalása a későbbiekben előkerülő inverz (gyök-, logaritmus-, ciklometrikus) függvények bevezetéséhez szolgál. *A tantárgyközi kapcsolatokon keresztül (fizika, kémia, biológia) érthetővé válik a változó és a függvényérték fogalma, valamint a változók és a függvényviszonyok ábrázolása.* A függvények tulajdonságait valamennyi osztályfokban, spirálisan felépítve tárgyaljuk, az összetett és inverz függvényeket, valamint a leképezéseket először a II., a határértéket és a folytonosságot pedig a IV. osztályban javasolt tanítani.

Lineáris függvény

Célok

A diákok:

- felírják a lineáris függvény hozzárendelési szabályát, és ábrázolják annak grafikonját,
- ismerik és alkalmazzák a lineáris függvény együtthatóinak jelentését,
- értelmezik és alkalmazzák a lineáris függvény grafikonját gyakorlati példák esetében,
- kiszámítják az egyenesek által közbezárt szöget,
- ismerik az egyenes különböző egyenleteinek jelentését,
- szövegben felismerik a lineáris viszonyt, és felírják a lineáris egyenletet,
- megoldanak lineáris egyenleteket,
- *elemeznek egyszerű lineáris egyenleteket, egyenlőtlenségeket és lineáris egyenletrendszereket,*
- kifejezik egyenletrendszerrel a problémát, és azt megoldják,
- megoldanak egyszerű, a mindennapi életből vett problémákat, és ezeket megfelelően értelmezik (interpretálják),
- lineáris függvény segítségével modelleznek a mindennapi életből vett egyszerű problémákat.

Tartalmak

- A lineáris függvény definíciója és tulajdonságai, a lineáris függvény grafikonja
- Az egyenes egyenletei a síkban
- Az egyenesek által közbezárt szög
- Lineáris egyenlet
- Lineáris egyenlőtlenség
- Lineáris egyenletrendszer

- *Gauss-elimináció*
- *Lineáris egyenlőtlenségrendszer*
- *Lineáris programozás (V)*
- A mindennapi életből vett egyszerű példák modellezése lineáris függvény segítségével

Módszertani útmutatók

Fel kell mérni a diákok általános iskolában megszerzett tudását, s ezáltal meg lehet állapítani, milyen fogalmaik alakultak ki a lineáris függvényekről. Hangsúlyt kell helyezni az adott problémának a matematikai nyelven történő kifejezésére (szöveges feladatok). Egyenesek tetszőleges hajlásszögét csak a tangens függvény addíciós tételeinek tárgyalása után lehet tanítani. A Gauss-féle eliminációs módszert a mátrixos felírás nélkül is be lehet mutatni. A lineáris programozásnál a gyakorlatból vett optimalizációs feladatokat kell megoldani. *A lineáris függvény és egyenlet tárgyalása összeköthető egyes, a fizikában használatos fogalmak bemutatásával (egyenletes és egyenletesen gyorsuló mozgás). A diákok a párhuzamos eltolásokat, nyújtásokat/zsugorításokat és tükrözéseket megfelelő számítógépes programokkal is elsajátíthatják.* A tartalmakat I. osztályban javasolt tárgyalni.

Hatványfüggvény

Célok

A diákok:

- felismerik a hatványfüggvényekkel leírható összefüggéseket, és ezt megkülönböztetik az egyéb összefüggésektől (egyenes arányosság...),
- ábrázolják és elemzik transzformációk segítségével a hatványfüggvény grafikonját,

- felírnak és modelleznek hatványfüggvény segítségével valós jelenségeket, és ezeket körültekintően kiválasztják.

Tartalmak

- A természetes kitevőjű hatványfüggvény definíciója és tulajdonságai
- A negatív egész kitevőjű hatványfüggvény definíciója és tulajdonságai
- A mindennapi életből vett példák modellezése hatványfüggvény segítségével

Módszertani útmutatók

A diákok a mindennapi életből vett, hatványfüggvénnyel modellezhető példákat tanulmányoznak. *A diákok a hatványfüggvény tulajdonságainak meghatározásánál használják az IKT-i eszközöket. Ajánlatos tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a fizikával (gravitációs erő, Stefan-törvény, gáztörvény egyenletek...).* A tartalmakat II. osztályban javasolt tárgyalni.

Gyökfüggvény

Célok

A diákok:

- a gyökfüggvényt a hatványfüggvény inverzeként értelmezik.

Tartalmak

- A gyökfüggvény definíciója, tulajdonságai és grafikonja

Módszertani útmutatók

A tanítás során az inverz függvény fogalmára és létezésének a feltételére kerül a hangsúly, ezért bevezetésként átismétlésre kerül az injektivitás, szürjektivitás és bijektivitás fogalma. A tartalmakat II. osztályban javasolt tárgyalni.

Másodfokú függvény

Célok

A diákok:

- felírják a másodfokú függvényt különböző adatok esetén, és ábrázolják annak grafikonját,
- értelmezik és alkalmazzák a másodfokú függvény grafikonját gyakorlati helyzetekben,
- megoldanak másodfokú egyenletet és egyenlőtlenséget,
- átalakítják a problémát egyenlet vagy egyenlőtlenség formájára, és ezt megoldják,
- elolvasnak egy matematikai szöveget, majd elemzik és bemutatják azt,
- *modelleznek másodfokú függvény segítségével a mindennapi életből vett egyszerű problémákat.*

Tartalmak

- A másodfokú függvény definíciója, tulajdonságai és grafikonja
- A másodfokú függvény megadási módjai
- *A másodfokú függvény alkalmazása – szélsőérték-problémák*
- Viète-formulák (képletek)
- A másodfokú egyenlet
- A parabola és az egyenes metszéspontja
- Két parabola metszéspontjai
- A másodfokú egyenlőtlenség
- *A másodfokú egyenlőtlenségrendszer*
- *A mindennapi életből vett példák modellezése másodfokú függvény segítségével*

Módszertani útmutatók

Hangsúlyozni kell, hogy az analitikus jellemzők összefüggenek a grafikonról leolvasható tulajdonságokkal. A másodfokú függvények jellemzőit bizonyos szélsőérték-problémák esetében alkalmazzuk. A diákok elolvasnak egy matematikai szöveget (pl. az aranymetszésről), majd elemzik és bemutatják. A diákok megvizsgálják olyan, a mindennapi életből vett példákat, amelyeket érdemes másodfokú függvénnyel modellezni. *Javasolt tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a fizikával (egyenletesen gyorsuló mozgás) és a kémiával (a koncentráció hatásának törvénye). IKT segítségével a következő tartalmak tárgyalhatók: grafikonok ábrázolása, egyes egyenletalakokban a konstansok szerepe, az egyenes és parabola kölcsönös helyzete, modellezés másodfokú függvénnyel.* A tartalmakat II. osztályban javasolt tárgyalni.

Exponenciális függvény

Célok

A diákok:

- felismerik az exponenciális összefüggést, és ezt megkülönböztetik az egyéb összefüggésektől,
- ismerik és alkalmazzák az exponenciális függvény tulajdonságait,
- ábrázolják az exponenciális függvény grafikonját,
- alkalmazzák az exponenciális függvény grafikonjának párhuzamos eltolását és nyújtását,
- összehasonlítják, hogy hatványosan vagy exponenciálisan növekszik-e egy mennyiség,
- felismerik és megoldják az exponenciális egyenleteket,
- *felírják és modelleznek exponenciális függvény segítségével a mindennapi életből*

vett egyszerű problémákat.

Tartalmak

- Az exponenciális függvény definíciója, tulajdonságai és grafikonja
- Exponenciális egyenletek
- *Az exponenciális egyenlőtlenség grafikus ábrázolása*
- Az exponenciális növekedés/csökkenés
- Valós jelenségek modellezése exponenciális függvény segítségével

Módszertani útmutatók

Az exponenciális növekedést/csökkenést a mindennapi életből vett példákkal (biológia, kémia, fizika, pénzügy) lehet szemléltetni. A diákok összekötik az exponenciális egyenletek analitikus megoldási eljárásait a grafikus módszerrel. A diákok elemeznek olyan, a mindennapi életből vett példákat, amelyeket érdemes exponenciális függvénnyel modellezni. *Az IKT használatával megvizsgálhatók az exponenciális függvény tulajdonságai. Ajánlatos tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a biológiával (pl. a populáció növekedése).* A tartalmakat a II., az exponenciális növekedést/csökkenést pedig a IV. osztályban javasolt tárgyalni.

Logaritmusfüggvény

Célok

A diákok:

- ismerik és alkalmazzák a logaritmusfüggvény tulajdonságait,
- ábrázolják a logaritmusfüggvény grafikonját,
- alkalmazzák az exponenciális és a logaritmusfüggvény közti kapcsolatot,

- alkalmazzák a logaritmusfüggvény párhuzamos eltolását és nyújtását,
- alkalmazzák a logaritmus azonosságait,
- felismerik az e számot és a természetes logaritmust,
- felismerik és megoldják a logaritmosos egyenleteket,
- összehasonlítják az exponenciális és a logaritmikus növekedést,
- *felírnak és modelleznek logaritmusfüggvény segítségével a mindennapi életből vett egyszerű problémákat.*

Tartalmak

- Az logaritmusfüggvény definíciója, tulajdonságai és grafikonja
- A logaritmus és azonosságai
- A tízes alapú és a természetes logaritmus
- *Áttérés új alapra*
- Logaritmosos egyenletek
- *A logaritmikus skála leolvasása*
- *A mindennapi életből vett példák modellezése logaritmusfüggvény segítségével*

Módszertani útmutatók

Hangsúlyozni kell, hogy a logaritmusfüggvény és az exponenciális függvény inverzei egymásnak. A logaritmosos egyenletek megoldása során a logaritmus értelmezési tartományát kell alapul venni. A diákok összekötik a logaritmosos egyenletek analitikus megoldási eljárásait a grafikus módszerrel (*IKT használata*). A diákok elemeznek olyan, a mindennapi életből vett példákat, amelyeket érdemes logaritmusfüggvénnyel modellezni. *A diákokat megtanulják a számológép használatát. Az IKT használatával*

megvizsgálhatják a logaritmusfüggvény tulajdonságait. Ajánlatos tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a kémiával (pl. a vízoldatok pH-értékének mérése) és a fizikával (pl. földrengés ereje, hangerő). A tartalmakat II. osztályban javasolt tárgyalni.

Polinomfüggvény

Célok

A diákok:

- a polinomfüggvény speciális eseteként értelmezik a lineáris és a másodfokú függvényt,
- műveleteket végeznek a polinomokkal,
- alkalmazzák a polinomok maradékos osztására vonatkozó alaptételt,
- alkalmazzák a polinom lineáris polinommal való osztására vonatkozó tételt,
- alkalmazzák a Horner-elrendezést a polinomfüggvény zérushelyeinek meghatározására,
- problémamegoldás során alkalmazzák a polinomok tulajdonságait,
- ábrázolják és értelmezik a polinomfüggvény grafikonját,
- *alkalmazzák a felező módszert,*
- megoldanak polinomegyenleteket és -egyenlőtlenségeket.

Tartalmak

- A polinomfüggvény definíciója, tulajdonságai és grafikonja
- Műveletek polinomokkal
- A polinomok maradékos osztására vonatkozó alaptétel
- A polinomfüggvény zérushelyei

- Az algebra alaptétele és következményei
- Horner-elrendezés
- A polinomfüggvény grafikonjának analízise
- Polinom-egyenletek
- Polinom-egyenlőtlenségek
- *A felező módszer*
- *Valós jelenségek modellezése polinomok segítségével*

Módszertani útmutatók

A polinomfüggvényre a *polinom* kifejezés is alkalmazható. Az ismert függvényekből (lineáris, hatvány- és másodfokú függvény) kiindulva vezetjük be a polinomfüggvényeket. A polinomok maradékos osztásának alaptételét összefüggésbe hozzuk az egész számok maradékos osztásának alapelveivel. A Horner-elrendezés bizonyítás nélkül is bevezethető. Összekötjük az analitikus tulajdonságokat a grafikonról leolvasható jellemzőkkel. A deriválás tárgyalása után meghatározhatjuk a stacionárius pontokat is, a polinomfüggvény grafikonját pedig még pontosabban leírhatjuk. A diákok olyan, a mindennapi életből vett példákat elemeznek, amelyeket érdemes polinomokkal modellezni. *Az IKT használatával megvizsgálhatók a polinomfüggvény tulajdonságai, ábrázolható annak grafikonja, megoldhatók a polinomegyenletek és polinomegyenlőtlenségek, valamint azok polinomokkal való modellezése.* A tartalmakat III. osztályban javasolt tárgyalni.

Racionális törtfüggvény

Célok

A diákok:

- ismerik és alkalmazzák a racionális törtfüggvény tulajdonságait,
- ábrázolják és értelmezik a racionális törtfüggvény grafikonját,
- megoldják a racionális egyenleteket,
- *megoldják a racionális egyenlőtlenségeket.*

Tartalmak

- A racionális törtfüggvény definíciója, tulajdonságai és grafikonja
- Zérushelyek, pólusok, aszimptoták
- Racionális egyenletek
- *Racionális egyenlőtlenségek*

Módszertani útmutatók

A racionális törtfüggvényre olyan példákat is kell mutatni, amelyeknek aszimptotája nem egyenes. A racionális egyenlőtlenségeket grafikus módszerrel is megoldjuk. *Az IKT használatával megvizsgálhatók a racionális törtfüggvény tulajdonságai, ábrázolhatók a racionális törtfüggvény grafikonjai, megoldhatók a racionális egyenletek és egyenlőtlenségek.* A témakört III. osztályban javasolt tárgyalni.

Szögfüggvények

Célok

A diákok:

- felírják és alkalmazzák a derékszögű háromszögre vonatkozó szögfüggvényeket,
- levezetik a szögfüggvényértékeket a következő szögek esetében: 0° , 30° , 45° , 60° , 90° ,

- levezetik és alkalmazzák az egyazon szög szögfüggvényei közötti összefüggéseket,
- számológépet használnak,
- alkalmazzák a tetszőleges szög szögfüggvényértékeit,
- ismerik és alkalmazzák a szögfüggvény jellegzetességeit,
- ismerik és képesek megmagyarázni a fogalmakat különböző reprezentációk segítségével (értéktáblázattal, grafikonnal, egységkörrel, analitikus módon),
- alkalmazzák a szögfüggvény grafikonjának transzformációit,
- ábrázolják és értelmezik a szögfüggvény grafikonjait,
- alkalmazzák az addíciós tételket,
- alkalmazzák a kétszeres szög szögfüggvényeit,
- alkalmazzák a kétszeres szög szögfüggvényeit és a félszög szögfüggvényeit a trigonometrikus egyenleteknél és problémamegoldás során,
- *alkalmazzák a szorzattá alakítást a kifejezéseknél, és ezeket fel tudják használni az egyenleteknél,*
- kiszámítják a ciklometrikus függvények értékeit,
- *vázolják a ciklometrikus függvény grafikonját,*
- megoldják a trigonometrikus egyenletet,
- értelmezik és elemzik az analitikus megoldásokat az adott probléma figyelembevételével,
- alkalmazzák a szögfüggvényeket olyan probléma megoldása során, ahol ki kell számítani a szöget,
- megoldanak egyszerű, összetett, hiteles és eredeti problémákat.

Tartalmak

- A szögfüggvények definíciója és tulajdonságai a derékszögű háromszögben
- A szögfüggvények definíciója az egységkörben
- A szögfüggvények tulajdonságai és grafikonjai
- A szögfüggvény grafikonjainak transzformációi
- Addíciós tételek
- Problémák
- *Szorzáttá és összeggé alakítás*
- A ciklometrikus függvények értékeinek kiszámítása
- *A ciklometrikus függvények grafikonjai és tulajdonságai*
- Trigonometrikus egyenletek
- *Szögfüggvények a technika világában és a természettudományban*
- *A körvonal parametrikus egyenlete (V)*

Módszertani útmutatók

Bevezetesként a derékszögű háromszögben a szögek nagysága és az oldalak közti arányt jól kiválasztott tevékenységekkel szemléltetjük. Hangsúlyozni kell az egységkörben a szög és az ívhossz összefüggését (radián, a szögfüggvények definíciója valós számokra vonatkozóan). A szögfüggvények tulajdonságait és értékeit a szögfüggvények értékeinek egységkörön szemléltethető geometriai értelemezésével figyeljük meg. Fontos, hogy az új fogalmakat, tulajdonságokat és összefüggéseket a diákok önállóan ismerjék meg, továbbá értelmezzék azok mértani jelentését. A ciklometrikus függvények tárgyalása előtt átismételjük az inverz függvény fogalmát. Célszerű az egyszerű trigonometrikus egyenletek megoldására koncentrálni. Az

analitikus megoldási eljárás mellett – az IKT felhasználásával – a grafikus módszer is bevonható. *Az IKT használatával megkeressük a szögfüggvények értékeit az egységkörben, és ábrázoljuk azok grafikonjait. Javasolt tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a fizikával (pl. lengés, hullámozás...).* A hegyesszögek szögfüggvényeit I. vagy II., a többi tartalmat a III. osztályban vezetjük be.

3.11 Kúpszeletek (20óra)

Célok

A diákok:

- példákat adnak a természetben előforduló kúpszeletekre,
- összehasonlítják és alkalmazzák a kúpszeletek analitikus és mértani definícióját,
- a kört mint speciális ellipszist értelmezik, és *levezetik az ellipszis egyenletét a kör egyenletéből nyújtással a kiválasztott tengely irányában,*
- elemzik az egyenletet, továbbá grafikus módon szemléltetik a köröket és az ellipsziseket középponti és párhuzamosan eltolt helyzetekben,
- elemzik az egyenletet, továbbá grafikus módon szemléltetik a hiperbolákat és a parabolákat csúcsponti helyzetben,
- elemzik a parabola egyenletének különböző alakjait,
- *megszerkesztik a kúpszeleteket,*
- *a kúpszeletet megfelelő számítógépes program segítségével ábrázolják is,*
- *elemzik a párhuzamosan eltolt hiperbolák és parabolák grafikus képét,*
- *elemzik a párhuzamosan eltolt hiperbolák és a parabolák egyenleteit,*
- *analitikusan és grafikusan elemzik a kúpszelet érintőjét,*

- analitikus és grafikus módszerrel meghatározzák egy kúpszelet és egy egyenes, illetve két kúpszelet metszéspontjait középponti helyzetben,
- indokolják az eredmények jelentését a metszéspontok analitikus elemzését követően,
- *megoldanak matematikai problémákat.*

Tartalmak

- A másodrendű görbe algebrai felírása
- Középponti helyzetű és párhuzamosan eltoltt körvonal
- Középponti helyzetű és párhuzamosan eltoltt ellipszis
- Hiperbola középponti helyzetben
- Parabola csúcsponti helyzetben
- *Párhuzamosan eltoltt hiperbola és parabola*
- *A kúpszeletek érintői*

Módszertani útmutatók

Megmutatjuk, hogy nem minden görbe feltétlenül függvénygrafikon. Átismételjük a síkbeli leképezéseket (párhuzamos eltolás, zsugorítás/nyújtás). Tárgyaljuk a sík kúppal, illetve kúpokkal vett metszeteit, valamint elmagyarázzuk a kúpszeletek elnevezéseinek eredetét. Minden görbe esetében abból indulunk ki, és úgy vizsgáljuk, hogy nincsen elforgatva. A diákoknak lehetővé tesszük, hogy otthoni felkészüléssel rövid kiselőadásokat tartsanak egy-egy kiválasztott témáról. Amennyiben van rá mód, úgy a fonállal történő ellipszis-rajzolást a gyakorlatban is elvégezzük, továbbá a kúpszeletek szokásos szerkesztése mellett a papírhajtogatós módszert is bemutatjuk. *A tanórát és kivitelezését a fizikával (keringés, optika, az égitestek mozgása, az*

elektromágneses térben az elektromosan töltött részecske pályája...) vagy a történelemmel összekapcsolva is megtervezhetjük. A párhuzamosan eltoló kúpszeletek tárgyalásakor összekötjük az algebrai teljes négyzetes kiegészítést a párhuzamos eltolás geometriai fogalmával. A hiperbolák tárgyalásakor megemlítendő a már ismert $y = x^{-1}$ hiperbola. A diákok megállapítják az $y = ax^2$, $a \neq 0$ és az $x^2 = 2py$ parabola közötti kapcsolatot is. Az egyenletrendszerek megoldásakor a hangsúly a bonyolult és aritmetikai szempontból nehéz példafeladatok helyett a metszéspontok analitikus és grafikus módszerén kell legyen (elegendő a középponti helyzetben lévő kúpszeletek bemutatása). A téma sok lehetőséget kínál az IKT-val végzett matematikai kísérletezésre. A tartalmakat a III., a kúpszeletek érintőit pedig a IV. osztályban javasolt tárgyalni.

3.12 Sorozatok és sorok (32 óra)

Célok

A diákok:

- példákat adnak sorozatokra, induktív módon következtetnek, általánosítanak és folytatják azokat,
- megtalálják és felírják a tagok közti kapcsolatot,
- felírják abban az esetben a sorozat tagjait, ha adott néhány első tag és a sorozat rekurzív képlete,
- megállapítják és elemzik a különbözően bemutatott sorozatok tulajdonságait (számmal, grafikusán, illetve analitikus módon felírt sorozat esetében...),
- leolvassák és szemléltetik a különbözően megadott, illetve bemutatott sorozatokat,
- alkalmazzák a sorozatok tulajdonságait,
- előrejelzik és kiszámítják a sorozat határértékét,

- megkülönböztetik a sorozatot a sortól,
- megkülönböztetik a konvergens és a divergens sor fogalmát,
- kiszámítják a sorozat n tagjának összegét,
- kiszámítják a mértani sor összegét,
- megkülönböztetik a kamatszámítást a kamatoskamat-számítástól,
- megkülönböztetik a konform és a relatív kamatlábat,
- alkalmazzák az ekvivalens tőkék elvét,
- megkeresik a kamatozás mindennapi példáit, előrejelzik az elvárásokat, majd szimulációs számítások segítségével döntést hoznak,
- kiszámítják az évjáradékot, és amortizációs tervet készítenek.

Tartalmak

- A sorozat definíciója
- A sorozatok tulajdonságai (véges, végtelen, monoton, korlátos, konvergens...)
- Számtani sorozat
- Mértani sorozat
- A számtani sorozat és a mértani sorozat első n tagjának összege
- A sorozat határértéke
- Sorok
- A mértani sor konvergenciája
- Kamatoskamat-számítás
- Évjáradékok

- Amortizációs terv

Módszertani útmutatók

A sorozatok bevezetésénél a különböző minták felismertetéséből indulhatunk ki. Olyan példákat is kell választani, amelynél a sorozat több különböző logika alapján is folytatható. Ahol lehetséges, javasolt az elméletet a mindennapi életből vett példákkal összekötni és alátámasztani. A sorozatok különböző módokon szemléltethetők, és a fogalmak az absztrakt szintig fejleszthetők. A határérték-számítás technikájának elsajátításánál fontosabb a fogalom megértése. *Az IKT használata a nehezebb matematikai fogalmak elsajátítását is segítheti. Az amortizációs terv elkészítésénél a diákok számítógépes táblázatkezelő programokat használnak.* A tervezést tartalmában és időkeretében tanácsos a szagimnáziumok szaktantárgyaihoz igazítani. *Érdemes tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a művészettörténettel (pl. Fibonacci-sorozat).* A tartalmakat III. vagy IV. osztályban javasolt tárgyalni.

3.13 Differenciálszámítás (30 óra)

Célok

A diákok:

- leírják a differenciálszámítás fogalmait grafikus, numerikus és analitikus példákon keresztül,
- kiszámítják a differenciálhányados értékét,
- kiszámítják a differenciálhányados határértékét,
- elmagyarázzák a derivált geometriai jelentését,

- *levezetik a derivált definíciója segítségével a deriválás egyszerű szabályait,*
- *levezetik a deriválási szabályok segítségével a függvény deriváltját,*
- deriválják az elemi és az összetett függvényeket,
- *kiszámítják az implicit módon megadott függvény deriváltját,*
- grafikon segítségével megállapítják azokat a pontokat, amelyekben a függvény deriválható (nem deriválható),
- összekapcsolják a függvények tulajdonságait a függvény deriváltjával (előrejelzik a tulajdonságokat, vázolják a grafikont...),
- *kiszámítják a függvény közelítő értékeit az érintő segítségével,*
- felírják a görbe adott pontjában az érintő egyenletét és a normális egyenletét,
- kiszámítják két görbe hajlásszögét,
- elemzik a függvényt a deriválta segítségével (megmagyarázzák a szélsőértékeket, meghatározzák a növekedési és csökkenési intervallumokat), és ábrázolják a grafikont,
- *összekötik a függvény adott intervallumon vett folytonosságának és deriválhatóságának fogalmait,*
- *megoldanak egyszerű szélsőérték-problémákat,*
- *megoldanak a mindennapi életből vett szélsőérték-problémákat, és megfelelően értelmezik a megoldást.*

Tartalmak

- Differenciálhányados, derivált és a derivált geometriai jelentése
- Deriválási szabályok, az elemi függvények deriváltjai
- *Közelítés deriválással (V)*

- A derivált alkalmazása
- A szélsőértékek, a függvény növekedése és csökkenése
- *A függvény második deriváltja*
- *A függvény inflexiós pontja, konvex és konkáv függvény*
- *A deriválható függvények folytonossága*
- Szélsőérték-problémák
- A mindennapi életből vett problémák modellezése, és ezek megoldása differenciálszámítási módszerek segítségével
- *Egy adott pont útja, sebessége és gyorsulása, valamint a görbe parametrikus megadása a síkban (V)*

Módszertani útmutatók

A lineáris függvény differenciálhányadosát kiterjesztjük a tetszőleges függvények differenciálhányadosára. Vizsgáljuk, milyen hatással van a párhuzamos eltolás és nyújtás/zsugorítás a differenciálhányadosra. A függvények deriváltjait mindennapi életből vett példákkal tesszük érhetőbbé. A második és magasabb deriváltakat a diákok önállóan is kutathatják. Lényeges, hogy a diákok a grafikus és analitikus ábrázolás mellett a numerikussal (értéktáblázat) is foglalkozzanak, ezt a technológiai eszközök használata is lehetővé teszi. A szélsőérték-problémák megoldásával a matematikai kutatásoknál kell foglalkozni. Némely fogalom (pl. a derivált geometriai jelentése) jól szemléltethető dinamikus geometriai programokkal. *Érdemes tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a fizikával (pl. egyenes és görbe mozgás).* A tartalmakat IV. osztályban javasolt tárgyalni.

3.14 Integrálszámítás (20óra)

Célok

A diákok:

- megmagyarázzák a függvény deriváltja és a határozatlan integrál közti kapcsolatot,
- ismerik az elemi integrálok táblázatát, és ezek kapcsolatát a deriváltak táblázatával,
- alkalmazzák a határozatlan integrál tulajdonságait,
- *integrálnak helyettesítéses módszerrel,*
- *alkalmazzák a parciális integrálás módszerét,*
- *integrálják a racionális törtfüggvényeket (résztörtekre való bontással),*
- ismerik a határozott integrál geometriai jelentését,
- alkalmazzák a határozott integrál tulajdonságait,
- alkalmazzák a határozatlan és határozott integrál közti kapcsolatot,
- megoldanak egyszerű matematikai és mindennapi életből vett problémákat,
- *elmagyarázzák, alkalmazzák és értelmezik a numerikus módszert, valamint a kapott eredményt.*

Tartalmak

- Határozatlan integrál (primitív függvény)
- A határozatlan integrál tulajdonságai
- *Helyettesítéses módszer*
- *A parciális integrálás*
- *A racionális törtfüggvények integrálása*

- Határozott integrál
- A határozott integrál tulajdonságai
- A határozatlan és határozott integrál közti kapcsolat
- *Lagrange-féle középértéktétel (V)*
- A határozott integrál alkalmazása (területek, *forgástestek térfogata...*)
- *A határozott integrál kiszámításának numerikus módszerei (V)*

Módszertani útmutatók

Az integrálszámítás tárgyalása kezdhető a határozott vagy a határozatlan integrállal. Az integrálszámítási algoritmusokat a mindennapi életből vett feladatokkal érdemes bővíteni. A bevezetett fogalmak (terület, forgástestek, munka, termelékenység...) a megfelelően kiválasztott matematikai és a valós életből vett példákkal támaszthatók alá. *Javasolt tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a fizikával (pl. út, munka). A határozott integrál bevezetésénél ajánlatos az IKT használata. A tartalmakat IV. osztályban javasolt tárgyalni.*

3.15 Kombinatorika (20óra)

Célok

A diákok:

- kiszámítják az $n!$ -t,
- megkülönböztetik az egyes kombinatorikai fogalmakat,
- kiszámítják a binomiális együttható értékét,
- levezetik a kéttagú kifejezés hatványait.

Tartalmak

- A szorzatszabály, fadiagram
- Az összegszabály
- Permutációk
- Ismétléses permutációk
- Variációk
- Ismétléses variációk
- Kombinációk
- Binomiális tétel
- Pascal-háromszög

Módszertani útmutatók

Áttekintést adunk a kombinatorika és a valószínűségszámítás keletkezésének történelmi vonatkozásairól, valamint jelenkori felhasználásuk példáiról: szerencsejátékok, biztosítás stb. Bemutatjuk a kombinatorika és a halmazok közti leképezések összefüggését. A diákok megtanulják a matematikai nyelvére lefordítani ezeket a problémákat, és bemutatásukhoz a kiválasztani a megfelelő matematikai modellt. A hangsúly a szorzat- és összegszabály fogalmára kerül, a formális megnevezés, a permutációk és variációk szimbolikus jelölésének áttekintése nem feltétlenül fontos. A mindennapi életből vett példákat mutatunk (lottó, sportfogadás, kártyák, játékautomaták, Morze-ábécé). A fogalmak – pontosabb elsajátításuk érdekében – a különböző tantárgyak egyedi nézőpontjaiból is vizsgálatra kerülnek: pl. a matematika és a biológia (öröklés, populációgenetika). *Használjuk az interaktív programokat és a számológépet.* Átismételjük a Pascal- háromszög fogalmát, és megvizsgáljuk annak tulajdonságait. Az I. osztályban tárgyalt kéttagú kifejezések hatványozását a binomiális együttható tulajdonságaival építjük tovább. A tartalmakat

III. vagy IV. osztályban javasolt tárgyalni.

3.16 Valószínűségszámítás (12óra)

Célok

A diákok:

- felírják az eseményeket, és műveleteket végeznek velük,
- megkeresik egy adott kísérlet összes eseményét,
- megkülönböztetik a szubjektív, a tapasztalati és a matematikai valószínűséget,
- megértik, valamint összekapcsolják a tapasztalati és a matematikai valószínűséget,
- ismerik és alkalmazzák a matematikai valószínűség definícióját,
- az egyes események megadott valószínűségeiből kiszámítják egyéb események valószínűségét,
- megkülönböztetik az egymást kizáró és a független események fogalmait,
- alkalmazzák az eseményteret (mintateret),
- *megfelelő képlet segítségével feladatokat oldanak meg.*

Tartalmak

- A valószínűségszámítás alapfogalmai: kísérlet, esemény, eseménytér (mintatér)
- Eseményekkel való műveletek
- Szubjektív valószínűség, tapasztalati valószínűség, matematikai valószínűség, az esemény valószínűsége
- Az ellentett események, valamint az eseményösszeg valószínűségének kiszámítása
- *Feltételes valószínűség*

- *Az események szorzatának valószínűsége, független események*
- *Független kísérletek sorozata*
- *A teljes valószínűség tétele (V)*
- *Kétfázisú kísérletek (V)*
- Normális eloszlás

Módszertani útmutatók

A valószínűségszámítás a mindennapi életből vett események valószínűségének analízisével, intuitív szinten vezethető be. Az események és a velük végezhető műveletek a halmazokkal való összefüggésükben kerülnek bemutatásra. A diákok konkrét példákon keresztül megismerkednek a kísérleti valószínűséggel (érme, kocka, henger, szögek), megfigyelik a relatív gyakoriságok alakulását, annak stabil állapotba kerülését (kísérleti vagy statisztikai valószínűség), és azt összehasonlítják a matematikai valószínűséggel. Olyan megfelelő tevékenységeket és problémákat választunk, amelyek segítségével a diákok fejleszteni tudják az eredmények értelmezéséhez és kritikai értékeléséhez szükséges készségeiket. A feltételes valószínűség kérdésénél a gondolatmenetet az esemény- és mintatér fogalmával egyszerűsítjük. A tanóránál oda kell figyelni az egymást kizáró és független események definícióira. A független kísérletek sorozatánál az ismereteket a Bernoulli-féle mintavételre korlátozódunk. Példákon keresztül megismertetjük és értelmezzük a normál eloszlás görbét. Tanácsos tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a biológiával (gének és öröklődés). A tartalmakat IV. osztályban javasolt tárgyalni.

3.17

Statisztika (10óra)

Célok

A diákok:

- megkülönböztetik a tanulmányozott tulajdonságot (változót), az egységet, a változó értékét, a mintát és a populációt,
- felismerik az adat tanulmányozott tulajdonságát,
- megkülönböztetik a leíró vagy minőségi adatokat, a sorszám vagy ordinális adatokat, valamint a számszerű vagy mennyiségi adatokat,
- összegyűjtik az adatokat, ezeket rendezik és strukturálják,
- kiválasztják a megfelelő diagramot az adatok bemutatására,
- leolvassák, elkészítik és értelmezik a statisztikai diagramokat,
- kifejlesztik az eredmények kritikus értelmezésében való jártasságukat,
- ismerik és alkalmazzák az adatok különböző összefoglalási módjait,
- kiválasztják az adatok összefoglalására az adatok fajtája szempontjából megfelelő leírási módot,
- kiszámítják, megbecslik és értelmezik az adatok középértékét, a módozt és a médiánt, és az adatok középértékeinek centralizált voltát,
- megbecslik az egyszerű kapcsolatokat a valószínűségi változók közt,
- kiszámítják, megbecslik és értelmezik a szóródási mérőszámok kiszámolásával a szóródási terjedelmet, a szórást és az interkvartilis terjedelmet,
- tapasztalati kutatás során alkalmazzák az adatokkal végzett munkáról tanultakat (kiválasztják a témát, felállítják a kutatási kérdést, összegyűjtik az adatokat, azokat rendezik és strukturálják, majd elemzik, bemutatják, végül a kapott eredményeket értelmezik).

Tartalmak

- Statisztikai alapfogalmak
- Az adatok fajtái
- Az adatok gyűjtése
- Az adatok rendezése és strukturálása
- Az adatok bemutatása (oszlopdiaagram, pozíciódiagram, kördiagram, hisztogram, sugárdiagram, vonal- és görbegráfiikon, dobozdiagram)
- Számítási közép, medián, módusz
- Szórási terjedelem, szórás, interkvartilis terjedelem
- Statisztikai feladat

Módszertani útmutatók

Fel kell mérni a diákoknak az általános iskolában megszerzett tudását, és arra építve ismereteiket a továbbiakban összetettebb példákkal lehet bővíteni. A tartalmakat már az I. osztályban javasolt tárgyalni, hiszen csak az általános iskolában tanult továbbfejlesztésről van szó. Sok lehetőség adódik a tantárgyközi kapcsolatok kialakítására: főleg a pszichológiával, a szociológiával, a biológiával és a kémiával (kutatómunka, szemináriumi dolgozat elkészítése, projekthét). A kutatások témáját a mindennapi életből érdemes venni (sport, zene, iskola...). Fejlesztjük az eredmények értelmezéséhez és kritikai értékeléséhez szükséges készségeket. *A statisztikai adatfeldolgozáshoz készült programok használata.* Fontos megérteni a középértékek és a szórás mérőszámainak funkcióját. A szórás a későbbiekben, a nehezebb statisztikai feladatoknál kerülhet tárgyalásra. A diáknak meg kell tanulnia, hogyan tud a különböző tantárgyaknál, valamint az iskolai projekthét keretében önállóan statisztikai feladatot készíteni. Olyan, a mindennapi életből vett valós problémákat érdemes tárgyalni, amelyek rutin eljárásokkal nem megoldhatók,

valamint több összefüggő területről származó ismereteket (pl. pszichológia, szociológia, biológia, sport, IKT) ölelnék fel. Tanácsos tantárgyközi kapcsolatot kialakítani a fizikával, a kémiával a méréseknél (szórás, átlag), valamint a biológiával (ökológia, kutatások és kísérletek) és az adatfeldolgozással (az adatok ábrázolása és értelmezése). A tartalmakat I. osztályban javasolt tárgyalni.

4. Elvárt eredmények

Az elvárt eredmények a kitűzött célok, tartalmak és kompetenciák alapján határozhatók meg. A tanár az órák megtervezésével és lebonyolításával felelős a diákoktól elvárt eredmények eléréséért, a diák pedig a munkájával és felelősségteljes magatartásával, képességeinek megfelelően járul mindehhez hozzá. Az elvárt eredményeket általános értelemben határozzuk meg, ami azt jelenti, hogy a diákok különböző mértékben és taxonómiai szinteken fogják azokat elsajátítani.

A diáktól a tanórákon és az oktatási folyamat egészében elvárható, hogy a tanulmányai végére elsajátítsa azokat az alapvető matematikai ismereteket és készségeket, amelyek segítségével képes kreatívan, hatékonyan és kellő önbizalommal alkalmazni tudását, miközben érti, hogy a matematika kulturális értéket is képvisel. Követelmény továbbá, hogy a diák felkészüljön az egyetemi tanulmányaira, és kifejlessze az egész életen át tartó tanuláshoz szükséges kompetenciákat. A diákoktól a körülményektől (a diákok hozott tudásától, intellektuális képességeiktől, érdeklődési körüktől, munkára való felkészültségüktől/hajlandóságuktól, a környezeti tényezőktől, a különféle motivációktól, a jövőbeli tanulmányaik során szükséges matematikai tudástól) függetlenül azt várjuk, hogy a tartalmakat nagyon jól megértsék, a fennálló összefüggéseket átlássák, és azokat összetett matematikai, valamint tantárgyközi problémák esetében képesek legyenek felhasználni.

4.1 Tartalmi tudás

Számok, algebrai kifejezések, egyenletek és egyenlőtlenségek

A diák:

- elsajátítja az alapvető számtani műveleteket, és ismeri a számhalmazok közti viszonyokat,
- ismeri és felhasználja a számhalmazok tulajdonságait, és érti bevezetésük szükségességének okait,
- helyesen elvégzi a számtani műveleteket (alpműveletek, hatványozás, gyökvonás) a számokkal és az algebrai kifejezésekkel, ezeket matematikai problémák megoldása során, valamint a valós életből vett szituációkban is felhasználja,
- alkalmazza az egyenletek és egyenlőtlenségek megoldásának szabályait, továbbá az egyenleteket grafikus úton is képes indokolni.

Halmazok és matematikai logika

A diák:

- ismeri a halmazelmélet alapvető fogalmait, a köztük fennálló összefüggéseket és tulajdonságaikat, valamint alkalmazza a matematikai logikát (felismeri az ok-okozati összefüggéseket),
- a matematikai logikát a modern matematika eszközeként fogja fel, és érti a logikai következtetéseket, valamint a mindennapi életben előforduló indoklásokban játszott szerepét.

Függvények

A diák:

- elsajátítja a függvény alapfogalmát,
- ismeri és alkalmazza az elemi függvényeket: lineáris, hatvány-, gyök-, másodfokú, exponenciális, logaritmus-, polinomfüggvény, racionális törtfüggvény és szögfüggvény, valamint tisztában van a velük végezhető műveletekkel,
- ábrázolja az elemi függvények grafikonjait, alkalmazza őket, és elemzi az összegüket, különbségüket, szorzatukat, hányadosukat és kompozíciójukat,
- problémamegoldás során felismeri és bemutatja, melyik elemi függvénnyel modellezhető az adott kérdés (pl. az ember növekedése a születéstől az érettségig).

Geometria

A diák:

- kialakítja a sík- és térszemléletét,
- ismeri és alkalmazza a sík- és térgeometria alapfogalmait és eljárásait,
- ismeri a síkidomok (főképp a kör és a háromszög) tulajdonságait,
- alkalmazza az euklidészi geometriából szerzett tudását a szögfüggvényekkel való összefüggésükben,
- ismeri az euklidészi geometriát mint a matematikai elmélet egyik pillérét,
- összeköti a klasszikus euklidészi geometriát és az analitikus megközelítést: a koordináta-rendszert és a vektorokat.

Analízis

A diák:

- ismeri és alkalmazza az egyszerű kúpszeleteket, és tudja a geometriai és az algebrai leírásuk közti összefüggéseket,
- ismeri és alkalmazza a sorozatokat, főleg a számtani és a mértani sorozatot, valamint a mértani sort,
- alkalmazza a pénzügyi matematika területén és a természetes növekedés fogalmával kapcsolatban a sorozatokat és a mértani sort,
- alkalmazza a függvények tulajdonságait,
- ismeri a függvény deriváltját és annak geometriai jelentését,
- alkalmazza a deriválást az érintő meghatározásához és az egyszerű szélsőértékfeladatok megoldása során,

- ismeri a határozatlan és a határozott integrál fogalmát,
- egyszerű példák esetében képes megadni a határozatlan integrált, ismeri a határozott és a határozatlan integrál közti összefüggést, és alkalmazza a határozott integrált a területszámításnál és a forgástesteknél.

Kombinatorika, valószínűségszámítás és statisztika

A diák:

- érti és tudja alkalmazni a szorzatszabályt és a kombinatorika egyéb fogalmait,
- ismeri a valószínűség klasszikus definícióját, és egyszerű példák esetén ki tudja számítani az összetett esemény valószínűségét,
- ismeri a statisztika alapfogalmait, és a tantárgyközi kapcsolatoknál alkalmazza azokat,
- analizál és kidolgoz egy statisztikai feladatot.

4.2 Procedurális tudás

Tanulmányaik során a diákok kifejlesztik azokat a képességeket és procedurális tudástartalmakat, amelyek ugyan szorosan összefüggenek a matematikai ismeretekkel, mégis egy kicsit általánosabbak, és más területekre is átvihetők. Mindezek képessé teszik a diákokat a specifikus (pl. matematikai) tudás felhasználására.

A diák:

- absztrakt módon gondolkodik,
- érti a különbséget a formális matematikai következtetés és az intuitív levezetések között,
- a problémát analitikusan elemzi, majd különböző stratégiák alkalmazásával oldja meg,
- felhasználja a matematikát a mindennapi életben (geometria, mérés, becslés, adatfeldolgozás, pénzmegtakarítás, kölcsön...),
- kifejleszti a továbbtanuláshoz szükséges hatékony olvasási stratégiákat (kommunikál az anyanyelvén),
- kifejezi magát szóban, írásban és más kommunikációs formákban,
- kommunikál a matematika nyelvén (olvas és megfogalmaz matematikai tartalmakat, használja a matematikai nyelvet a projektmunkák bemutatása során),
- megért és bemutat (szóban, írásban) valamely idegen nyelven egy egyszerűbb matematikai szöveget (idegen nyelveken folytatott kommunikáció),
- megtervez, és önállóan vagy csoportban kivitelez egy kutatást, majd bemutatja a folyamatot, az eredményeket, és azok lehetséges magyarázatait kritikus módon analizálja,
- kulcskérdéseket tesz fel, hipotéziseket alkot,
- kritikus módon gondolkodik a szükséges és elégséges feltételekről,

- használja az infokommunikációs technológiát, kritikával viszonyul az interneten vagy máshol talált információkhoz,
- kritikával viszonyul saját tudásához (a tanulás elsajátítása),
- hozzáállása kreatív, ösztönző, döntéshozó, kockázatértékelő (kezdeményezőkézség és vállalkozói kompetencia),
- megtanul uralkodni az érzésein, viselkedése magabiztos, másokat tisztel, kialakítja belső integritását (becsületes és őszinte), tud dolgozni csoportban, viselkedése felelősségteljes, az értékeket megőrzi, kialakítja, és fejleszti kritikus és becsületes magatartását a világról (szociális és állampolgári kompetenciák).

5. Tantárgyközi kapcsolatok

A tantárgyi összefüggések feltárásának célja az ismeretek közötti kapcsolatok kifejlesztése és az átjárható tudás megalapozása, amellyel a kreativitás és valamennyi tantárgyi területen a vállalkozói szellem kialakításának kedvező feltételei teremthetők meg. A tudástranszfer képessége egyrészt olyan szuverén személyiséget eredményez, aki képes szembenézni a különböző kihívásokkal, másrészt pedig az ismeretek átvitelének készsége hozzájárul az egyén magasabb fokú kulturális és etikai tudatosságához is.

A tantárgyközi kapcsolatok kifejlesztése a saját és a többi tantárgyi terület kapcsolatainak keresését, a különböző szakos tanárok együttműködését, a hasonló tartalmú és jellegű témák tárgyalásának közös tervezését, a példák és feladatok összehangolását, valamint projekthét vagy hasonló programok megszervezését jelenti. A tantárgyközi tervezés kivitelezhető az egyes tantárgyaknál a tartalmak önálló tárgyalásával vagy tantárgyközi tanórák keretén belül (tanári teammunka). Mivel mindez a tanár részéről nagyon sok tapasztalatot és önálló kezdeményezést igényel, megszervezése nehéz feladat. Mindenképpen kísérletet kell tenni legalább a tantárgyközi tervezés és egyeztetés megvalósítására.

5.1 A tantárgyközi kapcsolatok céljai és tevékenységei

A tantárgyközi kapcsolatok a tanóra során különböző szinteken valósulhatnak meg:

- a) Tartalmi szinten: interdiszciplináris problémák tárgyalása.
- b) Procedurális szinten: a procedurális ismeretek megtanulása és alkalmazása (pl. források keresése, beszámoló vagy gondolatábra készítése, kiselőadás, csoportmunka).
- c) Konceptuális szinten: a matematikatanítás során a diákok a kulcsfogalmakat a más tantárgyaknál szerzett tapasztalatok és ismeretek segítségével sajátítják el, így különböző szempontok segítségével értik meg és mélyítik el ismereteiket (pl. a biológiában a természetes szaporulat összefüggése az exponenciális függvénnyel). A példák fontos *mintául* szolgálnak arra, hogyan lehet jobban megérteni és értelmet adni a matematikai tartalmaknak.

A felvetett problémáknak meg kell felelniük a diákok tudásának és képességeinek. Fontos, hogy olyan új típusú kérdéseket mutassanak be, amelyek nem csak egy tartalmi területre korlátozódnak. A problémáknak a mindennapi élet kontextusából kell származniuk, olyan helyzetek bemutatásával, amelyek valójában megeshetnek a

diákokkal, illetve számukra társadalmi szempontból fontosak lehetnek. A diákok a tantárgyközi kapcsolatok kialakítása során (társadalom- és természettudományi) kutatásokat végeznek, vagy a matematikát a művészetekkel összekötő projekteket dolgoznak ki. Javasolt, hogy a diákok önállóan vizsgálódjanak és kísérletezzenek, valamint eközben használják fel az IKT eszközeit.

Pl. a matematikai modellezés a tanulás egyik aktív formája, amely segíti a tudás felhasználását és fejlesztését. A matematikában a modellezés azt jelenti, hogy egy nem matematikai objektum vagy folyamat leírása a matematika nyelvén történik. Mindebből az következik, hogy találni kell olyan matematikai leírást, amely az objektum, rendszer vagy folyamat tulajdonságait jellemzi. A matematikaórákon a diákok a természetben létező fizikai jelenséget vagy absztrakt szituációt bemutató modelleket ismernek meg. A diákok a geometriai modellek megfigyelésénél és elkészítésénél mértani tudásukat használják fel, és ezáltal fejlesztik analitikus gondolkodásukat, kreativitásukat, szintetizáló és általánosító képességüket, valamint egyszerű érvelési készségeiket.

Az alábbi táblázatban a tantárgyközi összefüggésekre vonatkozóan, a kapcsolat leírásával célokat és tevékenységeket vázolunk fel. A leírások általános jellegűek, ami azt jelenti, hogy az említett tevékenységeken belül a feladatokat – a diákok tudását és életkorát figyelembe véve – különböző évfolyamokon végezhetjük el, és a követelményszintet is ehhez igazítjuk.

1. sz. táblázat: A tantárgyközi kapcsolatok céljai és tevékenységei

Célok	Példák és leírás
<p>A diákok: összekötik a sík- és a térgeometria tartalmait;</p>	<p><i>A geometria alkalmazása életszerű szituációkban:</i> tető és lépcsőház megtervezése, a házhely optimális parcellázása, csempézés és más tevékenységek; különböző, a mindennapokban fellelhető testek felszínének és térfogatának kiszámítása.</p>

matematikai kutatásokat végeznek, összekötik a különböző matematikai tartalmak ismereteit, kutatómunkát végeznek, és azt bemutatják, a kutatómunka elkészítése során IKT-t használnak, munkájukba bevonják a szlovén vagy magyar szakos tanárt (nyelvhelyesség, forrásmegjelölés, stb.);

összekötik a különböző tantárgyi területek ismereteit;

valós problémákat oldanak meg, és alkalmazzák az adatfeldolgozás eszközeit, fejlesztik a médiában, interneten stb. található információkhoz és azok magyarázatához való kritikus viszonyulásukat, kereszttantervi témákat kapcsolnak a statisztikai vizsgálatokhoz (pl.: egészségmegőrzés, tudatos fogyasztóvá nevelés, vállalkozói képességek),

Matematikai kutatások témái:

szám, számfogalom, számjegy, periodikus tizedes törtek, a parabola csúcspontjának mértani helye, oszthatósági szabályok más számrendszerekben, emeletes törtek, Diophantoszi egyenletek, Euler-egyenes, Fauerbach-kör, lineáris programozás, a legkisebb négyzetek módszere, kriptográfia, Pascal-háromszög, fraktálok, papírhajtogatás.

Tantárgyközi megközelítésben a mindennapi életből vett problémák:

ház (ingatlan) vásárlása/eladása: az optimális megoldás kiszámítása, kockázatértékelés a részvények, értékpapírok vásárlásánál (főleg a diákok szemléletének tudatosítása), banki pénzmegtakarítás, statisztikai feladathoz információ keresése az interneten.

Az adatfeldolgozás eszközei, a középértékek és a szórás mérőszámai:

információ, az újságokban és a sajtóban található diagramok leolvasása, statisztikai kutatómunka: egészséges étrend, légszennyezés, osztálykirándulás szervezése, termék címkék, az interneten található információ és egyebek.

fejlesztik a kreativitásukat, absztrakt gondolkodásukat, megfigyelik és felismerik a szabályt a mintában, képek egy mintát folytatni (pl. algebrai kifejezéseket írnak fel);

fejlesztik geometriai szemléletüket és absztrakt (logikai matematikai) gondolkodásukat;

számítógépes programokat használnak.

Leképezések, minták:

szimmetria a természetben, aranymetszés, mértani minták képsorozata, díszek stb.

Modellezés:

fizikai objektumok bemutatása geometriai modellekkel, absztrakt (mindennapi) szituációk és folyamatok modellezése (az algebra alkalmazása).

Infokommunikációs technológia:

a statisztikai adatfeldolgozás programjai (munka a számítógépes táblázatkezelőkkel), a dinamikus geometriai programok, a szimbólumos számítást is támogató programok, a szövegszerkesztő és a matematikai szövegeket szerkesztő programok, valamint a bemutatókészítő programok, az infokommunikációs technológia használata (internet, e-tanterem).

5.2 A kompetenciák fejlesztése érdekében végzett tevékenységek

A matematika tanulásánál megfogalmazott célokat az első fejezetben szereplő kompetenciák fejlesztésével érjük el. Ezeket az alapvető irányelvekkel együtt soroljuk fel a továbbiakban. A táblázatban néhány, a kompetenciák fejlesztéséhez használható javaslat szerepel. A tevékenységek általános jellegűek, és a gimnáziumi matematikaoktatás terjedelmi kereteihez és tartalmához kötöttek.

Táblázat: Kompetenciák és a kompetenciák kifejlesztésének tevékenységei

Matematikai kompetencia és más kompetenciák	Tevékenységek a kompetencia fejlesztéséhez
A matematikai fogalmak és összefüggések ismerete, megértése és alkalmazása, valamint az eljárások kivitelezése és felhasználása;	A diákok: felismerik a fogalmakat modelleken, képen, matematikai szimbólumok leírásában és szövegben; példákat és ellenpéldákat hoznak fel; megmagyarázzák és használják a fogalmakat és tényeket; a probléma megoldásához kiválasztják és alkalmazzák a megfelelő képleteket/eljárásokat; más tantárgyak perspektívájából tárgyalják a matematikai fogalmakat; valós szituációkban felismerik a matematikai kontextust;
Következtetés, általánosítás, absztrahálás, reflektálás konkrét és általános szinten;	induktívan és deduktívan gondolkodnak, levezetik a matematikai bizonyításokat; modellt alkotnak, és megértik azt, megállapítják a modell érvényességét (reflektálnak), megfigyelnek különböző számokkal, képekkel, algebrai kifejezéssel megjelenített mintákat; felismerik annak helyességét, szabályait és törvényszerűségeit, valamint képesek azok általánosítására;
A matematikai nyelv megértése és használata (matematikai szövegek olvasása, írása és alkotása, valamint matematikai források keresése és kezelése);	használják a formális és a szimbolikus matematikai nyelvet, a szakszavakat és szimbólumokat; szöveges feladatokat oldanak meg; önállóan szöveges feladatokat alkotnak; matematikai és egyéb forrásokat keresnek;
Adatok gyűjtése, rendezése, bemutatása, elemzése, valamint az adatok, illetve eredmények értelmezése és értékelése;	statisztikai és tapasztalati kutatások során összegyűjtik, elemzik, értelmezik az adatokat, és következtetéseket fogalmaznak meg; leolvasnak, valamint elkészítenek táblázatokat és diagramokat, fejlesztik az információkhoz, illetve adatokhoz való kritikus viszonyulásukat; kritikusan gondolkodnak az eredmények értelmezéséről, kritikusan gondolkodnak az adatábrázolás eszközeiről;
Az infokommunikációs és egyéb technológia használata az új matematikai fogalmak megtanulása, a matematikai folyamatok végrehajtása, a matematikai problémák kutatása és megoldása során;	használják az infokommunikációs technológiát (IKT): a numerikus számológépet, a szimbólumos számításokat végrehajtó számológépet, a számítógépes programokat; e-tanulás (internethasználat, elektronikus postafiók használata, videokonferenciák...);

Problémák vizsgálata és megoldása;	<i>a matematikát matematikai kontextusokban és valós szituációkban alkalmazzák; nyitott és zárt problémákat oldanak meg; fejlesztik a problémamegértés képességét, értik a változókat és a köztük fennálló kapcsolatokat, tesztelik, megfigyelik és bemutatják a problémát, azokat megoldják, elgondolkodnak a megoldáson, és bemutatják, értelmezik, megindokolják, érvekkel alátámasztják a probléma megoldását.</i>
az anyanyelvén/szlovénul, illetve magyarul folytatott kommunikáció;	<i>a matematikaórákon, a matematikai tartalmak kontextusában is fejlesztik a hallás-, beszéd- és olvasásértési képességeiket, valamint íráskészségüket; matematikai szövegek (pl. a szöveges feladatok, tanulás a tankönyvből, az internetről) olvasásakor, a szlovén, illetve magyar nyelvel való tantárgyközi kapcsolaton keresztül fejlesztik olvasási stratégiáikat (a szöveg átfutása, kérdésfeltevés, olvasás, újbóli áttekintés, beszámoló), olvasási készségüket, az olvasáshoz való viszonyukat és az olvasás iránti érdeklődésüket, gondol a szakkifejezések fejlesztésére;</i>
az idegen nyelveken folytatott kommunikáció;	<i>fejlesztik az alapvető szakszókincset idegen nyelven (internetes forráskeresés, matematikai szövegek, interaktív programok); értik az idegen nyelven íródott matematikai szövegeket, bemutatnak egy alapfokú matematikai szöveget (szóban, írásban) idegen nyelven;</i>
a tanulási képességek elsajátítása (meg tudják tervezni a saját tevékenységeiket, felelősséget tudnak vállalni tudásukért, és fejlesztik metakognitív ismereteiket);	<i>megtervezik tanulásukat, követik és irányítják azt, értékelik saját tevékenységeiket; munka közben önellenőrzést végeznek, reflektálnak saját tudásukra, közreműködnek az osztályozásról folytatott beszélgetésekben, fejlesztik a tudásukért való felelősségtudatot, erősítik tanulási szokásaikat, metakognitív ismereteiket;</i>
Kezdeményezőkézség és vállalkozói kompetencia (kreativitás);	<i>a matematikaórákon elsajátítják a kreativitás, a kezdeményezőkézség, a döntéshozatal és a kockázattertelés készségeit (projektek);</i>
A jellembeli tulajdonságok (a szociális érzékenység, önbecsülés, társas értékek, érzelmi intelligencia) fejlesztése.	<i>csoportokban dolgoznak, és részt vesznek a csapatmunkában, a kooperatív tanulási folyamatokban (pl. projektek) a másokkal való közreműködés folyamán a következő tulajdonságaikat erősítik: megtanulnak uralkodni az érzelmeiken, felelősségteljessé válnak, fejlesztik önbecsülésüket és belső integritásukat (becsületesség, őszinteség).</i>

6. Módszertani útmutatók

A matematikaórákon a diák kognitív képességei mellett érzelmi intelligenciáját, emocionális tapasztalatait és pszichomotorikus készségeit is alakítjuk, ugyanis a matematika tanítása és tanulása hozzájárul a diák teljes személyiségfejlődéséhez.

A kutatási eredmények bemutatásával, a mindennapi életből vett problémák demonstrálásával, valamint az aktuális tartalmak és a modern technológiák integrálásával a tanulás és tanítás holisztikus megközelítését valósítjuk meg. A matematikaórákon fejlesztjük a diák szaknyelvi képességeit a matematika nyelvén, amelye univerzális és mások számára is érthető.

A diákok motivációjának növelése és a tananyag jobb megértése érdekében javasolt a matematikai tartalmakat szemléletes példákkal, korszerű tananyagokkal, valamint információtechnológiai eszközök segítségével bemutatni. Bár a matematikai készségek fejlesztéséhez szükségesek és hasznosak a hasonló és gyakori számolási feladatok, mégis ügyelni kell arra, hogy a diákok ne mechanikusan végezzenek műveleteket a matematikai szimbólumokkal, hanem a tartalmi elemeket értsék meg. Különösen szem előtt kell tartani, hogy az egyes témakörök és a tantervben előírt fogalmak között szerves kapcsolat legyen.

Amennyiben megvalósítható, úgy javasoljuk, hogy a tananyagok spirálisan felépítve (a matematikai fogalmak többszöri megbeszélésével, átismétlésével, elmélyítésével és továbbgondolásával) kerüljenek feldolgozásra. A tartalmak pontos elsajátítása alapvető fontosságú, hiszen bázisul szolgál a korábban elsajátított és az újonnan tárgyalt tartalmak összekapcsolásához, valamint megértéséhez. Ahol lehetséges, a szemléltetés gyakorlati példákon keresztül történjen.

Ha az osztályban olyan diákok is vannak, akik képesek a magasabb szintű tudástartalmak (**V**) elsajátítására, úgy a tanórát az ő igényeiknek is megfelelően kell megtervezni. Továbbá lényeges, hogy azok a diákok, akiknek a későbbi szakmájuk műveléséhez speciális ismeretekre van szükségük, ezeket elsajátítsák.

6.1 Infokommunikációstechnológia(IKT)

Az iskola a sikeres tanulásra, a munkára és az életre nevel. A technológiák alkalmazása a későbbi tanulmányokban, minden szakterületen és valamennyi munkakörben kötelező és elvárható, valamint mindaz a mindennapi életnek is a szerves része. Ezért az iskolának meg kell tanítania a diákokat ezek használatára. A diákok tanórákon, elsősorban a matematikai problémák megoldása során, megtanulják a technológia használatát, és mindeközben elsajátítják annak mindennapi használatát is.

Az IKT sok lehetőséget nyújt a diák matematikai tudásának hatékony fejlesztésére, továbbá lehetővé teszi a tanítási és tanulási folyamatok különböző megközelítéseit (pl. a matematikai és mindennapi problémák kutatása, megoldása).

Az IKT gyors és pártatlan visszajelzést biztosít. Ez arra ösztönözheti a diákokat, hogy előre megtervezzék, majd fejlesszék és teszteljék ötleteiket, szükség esetén azokat megváltoztassák, illetve az indokolt korrekciókat elvégezzék.

Az IKT képes kompenzálni a diákok különböző tanulási és grafomotoros hiányosságait, valamint a diákok kognitív képességeit figyelembe véve további ismeretszerzési lehetőségeket kínál.

Az infokommunikációs technológia lehet:

- matematikai fogalmakat fejlesztő eszköz,
- valós vagy tanulási szituációk létrehozásának, szimulációjának és modellezésének eszköze,
- egyszerű taneszköz,
- tanítási módszer,
- kommunikációs eszköz.

A technológiák fajtái:

- numerikus számológépek,
- szimbólumos számításokat végző számológépek,
- személyi vagy hordozható számítógépek,
- matematikai fogalmak kifejlesztését szolgáló programok,

- a tudás automatizálására és a tudás tesztelésére tervezett programok,
- e-tananyagok és információk az interneten (e-tantermek),
- adatok, eljárások, eredmények átvitelére, rögzítésére és megjelenítésére szolgáló eszközök.

6.2 Házi feladatok

A házi feladatok az iskolai munka szerves részét képezik, és a matematika tanulásánál rendkívül fontosak. A diákokat az otthoni munka az önálló tanulásra készíti fel, mindeközben fejleszti a tanulási szokásokat, a kitartást, a pontosságot és a kritikus hozzáállást. A házi feladat az önszabályozó tanulás alapját jelenti.

Miután a házi feladat a következő tanórán elvégzendő munkának fontos kiindulópontja, ezért kellő gondossággal kell megtervezni. Több funkciója is van: segíti a gyakorlást, csökkenthető vele a tananyag elfelejtése, szolgálhat önellenőrzésként, valamint jelentheti az ismereteknek az új szituációban történő tanulását és vizsgálatát. A jól megtervezett házi feladat figyelembe veszi a diákokat jellemző különböző tanulási stílusokat, valamint a képességeikben és érdeklődésükben fennálló eltéréseket. A diákok számára mindig világossá kell tenni a házi feladat rendeltetését, hiszen mindaz a gyakorláson kívül a tanár és a diákok számára is fontos visszacsatolás a tananyag elsajátításának kritikus pontjairól.

A házi feladat ellenőrzése során nemcsak az eredményeket, hanem a megoldási stratégiákat is meg kell beszélni. A rendszeresen és jól végzett otthoni munka hatással van a tudás minőségére, és következésképpen az érdemjegyre is.

7. Az eredmények értékelése

A tanóra szerves részét képezi a tudás ellenőrzése, amely a diáknak és a tanárnak egyaránt visszajelzést ad. A matematikaórákon az alapvető matematikai fogalmak és koncepciók megértését, illetve használatát, az azok közt fennálló összefüggések megértését, a matematikai eljárások alkalmazását, a matematikai feladatok megoldásának képességét, valamint a matematikai nyelven történő kommunikáció készségét ellenőrizzük és értékeljük.

Az ellenőrzés már bejáratott formái (pl. írásbeli feladatok, szóbeli feleltetés) mellett a tudásfelmérés más módjai is alkalmazhatók: pl. szemináriumi dolgozat vagy projektmunka bemutatása, statisztikai és matematikai kutatási feladatok; matematikai, logikai és szórakoztató matematikai tanulmányi versenyeken való részvétel, házi feladatok ellenőrzése, tanulói portfólió készítése, valamint rövid szóbeli vagy írásbeli dolgozatok. A portfólióban a diák következő tevékenységei szerepelhetnek: saját írásbeli feladatainak javítása és analízise, kitöltött feladatlapok, nehezebb feladatok megoldási eljárásainak bemutatása, matematikai kutatómunkák, egyes témakörökből rövid motivációs feladatok gyűjteménye, nehezebb feladványok megoldásai, illetve egyéb önálló tevékenységek a matematika tantárgy keretein belül, valamint saját munkájának, kitűzött terveinek és céljai elérésének értékelése.

A tudás nyomon követéséhez a következő irányelveket javasoljuk:

- a tudásellenőrzésnek összhangban kell lennie a tanóra céljaival, és azt folyamatosan ellenőrizni kell;
- a tudásfelmérési formáknak változatosnak kell lenniük, hogy a diákoknak elegendő lehetőséget adjon tudásuk széleskörű bemutatására;
- a diáknak a tanévben legalább négy írásbeli és egy szóbeli érdemjegyet kell kapnia;
- a diákokat bátorítanunk kell arra, hogy felelősséget vállaljanak saját tudásukért;
- szóbeli feleltetésnél leginkább azokat az ismereteket értékeljük, amelyeket nem tudunk írásban jól mérni (stratégiák alkalmazása, problémamegoldás, a koncepciók és eljárások megértése, kommunikáció), ezért a szóbeli feleltetésre elég időt kell szánni. A szóbeli feleltetéskor az írásban jól mérhető ismereteket nem kérdezzük.