

SZAKISKOLAI KÉPZÉST KIEGÉSZÍTŐ PROGRAM (PTI)

TANTERV

MATEMATIKA

206–242 óra

TARTALOMJEGYZÉK

I. BEVEZETŐ	3
II. A KULCSKOMPETENCIÁK KIALAKÍTÁSA A MATEMATIKA TANTÁRGYNÁL.....	3
III. IRÁNYADÓ CÉLKITŰZÉSEK, KULCSKOMPETENCIÁK, ÚTMUTATÓK A KULCSKOMPETENCIÁK FEJLESZTÉSÉHEZ	4
3.1 Irányadó célkitűzések.....	4
3.2 Kulcskompetenciák.....	4
3.3 Útmutatók a kulcskompetenciák fejlesztéséhez.....	6
Megközelítés.....	6
A kulcskompetenciák fejlesztése és értékelése	7
Differenciálás.....	11
Kapcsolat a szakmai és más tantárgyakkal.....	11
Technológia	11
A matematika szakos tanár szerepe	12
IV. OPERATÍV CÉLOK.....	13
1. téma: SZÁMOK.....	14
1.1 Alapvető ismeretek a számokról.....	14
1.2 Komplex számok (választható témakör)	16
2. téma: GEOMETRIA	17
2.1 A sík- és térgeometria alapfogalmai.....	17
2.2 A sík leképezései	19
2.3 Mértani síkidomok	19
2.4 A hegyesszögek szögfüggvényei.....	20
2.5 Mértani testek.....	22
2.6 Másodrendű görbék (választható témakör)	23
2.7 Vektorok (választható témakör)	24
3. téma: FÜGGVÉNYEK, EGYENLETEK ÉS DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS	25
3.1 Függvény és egyenlet	25
3.2 Lineáris függvény és lineáris egyenlet	27
3.3 Hatványfüggvény és magasabb fokú egyenletek	29
3.4 Másodfokú függvény és másodfokú egyenlet.....	31
3.5 Polinomok	33
3.6 Racionális törtfüggvények.....	34
3.7 Exponenciális függvény és exponenciális egyenlet	34
3.8 Logaritmus, logaritmusfüggvény és logaritmikus egyenlet	36
3.9 Szögfüggvények (kiegészítés).....	38
3.10 Ciklometrikus függvények és a trigonometrikus egyenletek (választható témakör)	40

3.11 Differenciálszámítás.....	41
3.12 Sorozatok.....	43
4. téma: A LOGIKA, AZ ADATFELDOLGOZÁS ÉS A VALÓSZÍNŰÉGSZÁMÍTÁS ALAPJAI ..	44
4.1 A logika alapjai	44
4.2 Az adatfeldolgozás	44
4.3 A valószínűségszámítás alapjai	45
V. MINIMÁLIS KÖVETELMÉNYEK.....	47
VI. MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓK.....	47
VII. AZ ELLENŐRZÉS ÉS ÉRTÉKELÉS MÓDJAI.....	47

I. BEVEZETŐ

A matematika mint tudomány elválaszthatatlanul összefonódik a többi tudománnyal, az élet valamennyi területével, továbbá az egyén általános műveltségében is fontos szerepet játszik. A matematika tanítása lényeges, hiszen a diákok annak tanulásával elsajátítják és fejlesztik a nehezebb gondolkodási formákat (pl. a deduktív megközelítést), valamint egyidejűleg megismerkednek azokkal a matematikai fogalmakkal és műveletekkel, amelyek nélkülözhetetlenek a modern társadalomba való beilleszkedéshez és a munkavállaláshoz.

A matematikatanítás a szakiskolai programot kiegészítő programban figyelembe veszi a különböző szakmai ágazatok jellegzetességeit és a diákok szükségleteit. Mindeközben számol azokkal a kompetenciákkal és tudásanyaggal, amelyet a diákok a középfokú szakmai képzés során sajátítottak el.

Minden szakterület egyre jobban matematizált, de maga a matematika már kevésbé látható, hiszen mindaz a technológiában (számítógépes programokban, matematikai modellekben, gépezetekben és termékekben) rejtőzik. Bizonyos tevékenységek elvégzéséhez egyre kevésbé fontos a számtani műveletek és az egyéb folyamatok rutinszerű használata, annál lényegesebb a fogalmak megértése, valamint annak a képessége, hogy az egyén a szakterületén össze tudja kapcsolni a matematikai ismereteket az adott szituációkkal, és képes legyen megoldani a szakmai problémákat. Mindehhez kellő szakértelemmel kell használni azokat a manapság rendelkezésre álló technológiai eszközöket, amelyek a matematikai alpműveletek nagy részét elvégzik.

A szakiskolai programot kiegészítő képzést végző diákok oktatásának két fontos célja van. A megszerzett matematikai ismereteknek és az általuk fejlesztett kompetenciáknak egyrészt stabil eligazodást kell nyújtaniuk a saját szakterületükön végzett tevékenységek végrehajtásához, másrészt ezeknek az tudástartalmaknak elég általánosnak kell lenniük ahhoz, hogy a diákok tovább tudjanak tanulni. A matematikaórákon a tanulócsoport szerkezetét, sajátosságait és lehetőségeit figyelembe véve kell a tevékenységeket megszervezni, mindeközben szükséges ügyelni arra, hogy a feladatok közel álljanak a diákok érdeklődési köréhez, továbbá kapcsolódjanak szakmájuk sajátosságaihoz és a mindennapi élet egyéb területeihez. Ezen felül lényeges a diákok pontos, rendszerezett, következetes, rendezett és kitartó munkára történő nevelése.

II. A KULCSKOMPETENCIÁK KIALAKÍTÁSA A MATEMATIKA TANTÁRGYNÁL

A kulcskompetenciák a matematika tantárgy kulcskompetenciáin keresztül kerülnek végrehajtásra, ezek pedig a tantárgy globális céljaiból következnek, amelyek leírása a jelen tanterv III. fejezetének 3. 2. részében található.

III. IRÁNYADÓ CÉLKITŰZÉSEK, KULCSKOMPETENCIÁK, ÚTMUTATÓK A KULCSKOMPETENCIÁK FEJLESZTÉSÉHEZ

3.1 Irányadó célkitűzések

1. Az oktatásban résztvevők minél magasabb szintű matematikai műveltségének az elérése. A matematikában az „írástudás” a következőket jelenti:
 - a. ismerni, érteni kell a számtani és geometriai fogalmakat, műveleteket, valamint a köztük fennálló összefüggéseket és önállóan kell tudni dolgozni azokkal;
 - b. érteni kell a matematikai eszközökkel (diagramokkal, táblázatokkal, felmérésekkel) bemutatott információkat, és alkalmazni kell tudni a matematikát és a matematikai eszközöket a kommunikáció során;
 - c. képességet a különböző jelenségek sajátos észlelésére és magyarázatára, valamint a valóság értelmezésére;
 - cs. képességet a matematikai problémák megoldására, valamint a matematikai fogalmak, az eszközök, a technológia és a modellek alkalmazására más területeken;
 - d. pozitív viszonyt a matematikai ismeretekhez, a tanuláshoz és az matematikai ismeretek alkalmazásához, valamint annak tudatosítását, hogy a matematika mint kulturális érték is fontos.
2. Azon matematikai ismeretek fejlesztése és elsajátítása, amelyek szükségesek a többi tantárgy sikeres megtanulásához, valamint a diák leendő szakmájában a tevékenységek eredményes elvégzéséhez.
3. A továbbtanulás szempontjából fontos absztrakt és deduktív matematikai gondolkodás fejlesztése.

3.2 Kulcskompetenciák

A szakiskolai programot kiegészítő képzésben a matematika tantárgy kapcsán megfogalmazott célok bizonyos kulcskompetenciák fejlesztésével érhetők el. A lenti táblázatban a kompetenciák és az azokhoz kapcsolódó célkitűzések szerepelnek.

Kompetenciák	A tanítás tartalmaz(za)
<ul style="list-style-type: none">• Az alapvető matematikai fogalmak, összefüggések és	A következő területek tárgyalását: <ul style="list-style-type: none">• számok és műveletek,

<p>műveletek megértése, illetve alkalmazása</p> <ul style="list-style-type: none"> • Képesség a matematikai problémák kutatására és megoldására • Képesség az általánosításra és az elvonatkoztatásra, valamint a problémák általános vagy elvont szinten történő megoldására • Képesség a matematikának a szakterületen és egyéb kérdésköröknél történő értelmezésére és kritikai megítélésére • A matematikai eszközök használatának képessége a kommunikációs folyamatokban • A matematikai műveletek végrehajtásában, valamint a kutatásokban és matematikai problémák megoldásában a technológia alkalmazásának képessége • Az adatok gyűjtésének, rendszerezésének és elemzésének a képessége • A munkafolyamatok megtervezésének és megszervezésének a képessége • Képesség csoportban történő együttműködésre • Felelősségvállalás a saját tudását illetően, valamint a matematikai ismeretek önálló tanulásának képessége • A matematika kulturális 	<ul style="list-style-type: none"> • mennyiségek közötti összefüggések (függvények), • algebra (algebrai kifejezések, egyenletek), • mérés, sík- és térgeometria, szögfüggvények, • adatfeldolgozás. <p>A következő eszközök alkalmazását:</p> <ul style="list-style-type: none"> • numerikus számológép, grafikus számológép, számítógépes programok a matematikai folyamatok végrehajtásánál, a matematikai problémák kutatásánál és megoldásánál. <p>Olyan szituációkat, amelyeknél a diák fejleszti a következő kompetenciáit:</p> <ul style="list-style-type: none"> • a felhasznált matematikai eszköz (modell) alkalmasságának a megítélését szakmájában és más területeken, • a matematikai eredmények és elemzések értelmezésének képességét a szakmájában és más területeken, • matematikai számítások felhasználásánál kritikus viszonyulást szakmájában és más területeken, • zárt és nyitott matematikai problémák megoldási stratégiáinak az ismeretét, • képességet az általánosításra, az elvont gondolkodásra és a szimbolikus matematikai nyelv használatára, • a problémamegoldás során a matematikai és szakmai kontextusban történő tervezés képességét, • matematikai és nem matematikai kontextusban a problémák vizsgálatának képességét,
--	---

<p>értékként történő elfogadása és felfogása</p> <ul style="list-style-type: none"> • Önbizalom a saját matematikai képességeit illetően, a pozitív önkép fejlesztése 	<ul style="list-style-type: none"> • kitartást, rendszerességet, pontosságot, kritikus gondolkodásmódot, felelősségérzetet, valamint tájékozódási képességet az információk változó világában. <p>Olyan tevékenységeket és szituációkat:</p> <ul style="list-style-type: none"> • amelyeknél a diákok teammunka keretében oldanak meg matematikai feladatokat, • amelyeknél a diákok matematikai feladatokat oldanak meg komplex szakmai, továbbá a mindennapi életből vett szituációkban, • amelyek közel állnak a diákok világszemléletéhez, számukra fontosak, érdekesek, és alkalmasak arra, hogy azok megoldásával bizonyítsák a tudásukat.
--	--

3.3 Útmutatók a kulcskompetenciák fejlesztéséhez

Megközelítés

A szakiskolai programot kiegészítő programokban a tanítás során a feldolgozásra kerülő témakörnél a tárgyalt kérdéskörnek megfelelően különböző megközelítéseket kell alkalmazni:

- Az induktív megközelítésnél olyan konkrét szituációkból érdemes kiindulni, amelyek a diákok számára jól érthetőek, és alkalmasak arra, hogy a diákok a matematikai kérdésekről önállóan gondolkodjanak. Ehhez megfelelő didaktikai eszközöket szükséges használni. A magyarázatban a konkrét esettől az absztrakt kérdésekig haladunk.
- A deduktív megközelítésénél az elméleti-matematikai alapra, a bizonyításokra és azok későbbi felhasználására kerül a hangsúly.
- Az induktív és deduktív megközelítés kombinációjánál valós szituációkból kiindulva, deduktív gondolkodással a tulajdonságokat absztraháljuk, majd bebizonyítjuk.

A kulcskompetenciák fejlesztése és értékelése

Kulcskompetenciák	A kompetencia fejlesztése	A kompetencia értékelése
<ul style="list-style-type: none"> • Az alapvető matematikai fogalmak, összefüggések és műveletek végrehajtásának megértése, valamint alkalmazása • Képesség a matematikai problémák vizsgálatára és megoldására • Képesség az általánosításra és az elvonatkoztatásra, valamint a problémák általános vagy elvont szinten történő megoldására 	<p>A szakiskolai képzést kiegészítő programokban matematikaórákon az egymással összefüggő állítások rendszerével az absztrakt-deduktív tudás, az általánosítással és az absztrakcióval a tapasztalati-reflexív tanulás kerül fejlesztésre. Néhány tartalmat és ismeretet matematikai kontextusban érdemes formálni (figyelman kívül hagyva az esetleges motivációs eszközöket), majd ezek használata a való életből vett könnyebb vagy nehezebb követelményszintű példákkal kerül bemutatásra.</p> <p>Az egyes matematikai tartalmaknál olyan szituációkból kell kiindulni, amelyek a diákok számára ismertek és érthetőek. A matematikai fogalmak általánosítása és absztrakciója rendszerint a vizsgált helyzettel összefüggésben történik meg. A diákok számára bemutatott problémák a teljesen matematikai szituációktól kezdve a szakterületükkel összefüggésben álló kérdéskörökig terjedjenek, illetve olyan témák kerüljenek elő, amelyek tárgyalásakor otthonosan érzik magukat.</p> <p>Hangsúlyozandó: legfontosabb az</p>	<p>A kompetenciák értékelésének megfelelő formái:</p> <ul style="list-style-type: none"> • írásbeli tudásfelmérő dolgozatok, • szóbeli feleltetés, illetve ellenőrzés megbeszéléssel, • szemináriumi dolgozatok. <p>A kompetenciák értékelésénél a következőkre kell figyelni:</p> <ul style="list-style-type: none"> • a szituáció leírására megfelelő matematikai fogalommal, • a szituáció összekapcsolására (bonyolultabb) matematikai fogalmakkal, folyamatokkal és stratégiákkal, • a választásra és a folyamatok helyes végrehajtására, • a diák absztrakciós szintjére, a deduktív következtetés elemeire és a folyamat szisztematikusságára, • a komplex folyamatok, illetve stratégiák kiválasztására a technológiai eszközökkel történő végrehajtás során,

	<p>egyszerűbb és összetettebb matematikai fogalmak, valamint az egyszerű műveletek megértése és végrehajtása, továbbá a definíciók és levezetések összefüggéseinek bemutatása a szakmai és egyéb tárgykörökkel kapcsolatosan. Mindez a diákok számára az érthető stratégiák ismeretét és a komplex műveletek technológiai segédeszközökkel történő megvalósítását jelenti.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • a folyamatok, feladatmegoldási stratégiák kiválasztásának és a megoldások helyességének indoklására.
<ul style="list-style-type: none"> • Az adatok gyűjtésének, rendszerezésének és analizálásának a képessége • A kommunikációban a matematikai eszközök használatának a képessége 	<p>Fontos, hogy a diákok találkozzanak olyan összetett feladatokkal, amelyeknél megadott adatokkal dolgoznak, és/vagy azokat különböző módokon (táblázattal, többféle diagrammal, szövegesen) kell bemutatni.</p> <p>Lényeges, hogy a diákok lássanak olyan feladatokat, amelyeknél nagy mennyiségű, esetlegesen túl sok adat áll rendelkezésre, és olyanokat is, amelyeknél túl kevés (ezeket önállóan kell megtalálniuk).</p> <p>A diákok ismerjenek meg olyan feladatokat, amelyeknél önállóan kell a mérésekből vagy másodlagos forrásokból kapott adatokat összegyűjteni és rendezni. Ezeket a készségeket a diákok az oktatás korábbi szakaszában sajátítják el, ezért a matematikaórákon és a tantárgyközi projektekben</p>	<p>A kompetenciák értékelésének megfelelő formái:</p> <ul style="list-style-type: none"> • az írásbeli tudásfelmérőknél komplex feladatok, • matematikai és tapasztalati kutatások (azaz nyílt problémák tárgyalása – az adatgyűjtéstől és a kérdésfeltevéstől a feladat elkészítéséig, valamint a beszámoló bemutatásáig), • projektmunkák. <p>A kompetenciák értékelésénél a következőkre kell figyelni:</p> <ul style="list-style-type: none"> • a megoldás teljessége és a megoldási terv megfelelősége • a procedurális tudás jelenléte a megoldás egyes részeiben • az adatgyűjtés és -elemzés megfelelősége és összetettsége, • a megállapítások

	végzett vizsgáldások részeként főként a megfelelő feladatokkal történő gyakorlásra kerül a hangsúly.	alátámasztása, valamint kritikus hozzáállás az összegyűjtött és értelmezett adatok elemzése során.
<ul style="list-style-type: none"> A technológia alkalmazásának a képessége a matematikai műveletek végrehajtásában, valamint a matematikai problémák kutatása és megoldása során. 	<p>A diákok megtanulják, miként lehet a különféle technológiai eszközöket észszerűen használni. Ezek alkalmazásának az alapvető célja, hogy a diákokat támogassa a bonyolultabb problémák megoldásában a számukra nehézséget jelentő feladatok elvégzésekor. Nem lehet azonban cél, hogy a diákok a technológia segítségével küzdjék le a rutin matematikai műveletek (pl. a lineáris függvény grafikonjának ábrázolása) során előforduló akadályokat.</p> <p>A technológia segítségével olyan komplex, valós vagy fogalmi szinten bonyolultabb problémákat tárgyalunk, amelyeket a diákok anélkül nem tudnának megoldani. A diákok olyan szakmai kérdéseket látnak, amelyeknél a matematikai problémák megoldásához a technológia felhasználása megfelelő eszköz.</p>	<p>A kompetenciák értékelésének megfelelő formái:</p> <ul style="list-style-type: none"> matematikai és tapasztalati kutatások, projektmunkák, írásbeli tudásfelmérő dolgozatok, szóbeli feleltetés, illetve ellenőrzés megbeszéléssel.

<ul style="list-style-type: none"> • Az értelmezés és kritikus értékelés a képessége a matematikában, valamint szakterületén és más területeken • A munkafolyamatok megtervezésének és megszervezésének a képessége • Képesség csoportban történő közreműködésre és összedolgozásra 	<p>A diákok találkozzanak a szakmájukkal összefüggő bonyolult és kevésbé összetett modellezési példákkal. Ennek során hangsúlyozni kell a folyamat matematikai aspektusát, használatát és alkalmasságának kritikus értékelését, valamint az összekapcsolódásokat.</p> <p>A diákok a matematikaórákon vagy több tantárgy keretein belül nagyobb szabású (nem feltétlenül bonyolult) problémákkal foglalkoznak. Legjobb, ha a probléma megoldása csapatban történik, és megelőzi azt a munka célszerű megtervezése.</p>	<p>A kompetenciák értékelésének megfelelő formái:</p> <ul style="list-style-type: none"> • matematikaórán nehezebb, a szakterületükkel összefüggő feladatok megoldása, • projektmunka kidolgozása a matematikaórákon vagy több tantárgy keretén belül.
<ul style="list-style-type: none"> • Felelősségvállalás saját tudását illetően, valamint a matematikai ismeretek önálló tanulásának a képessége • A matematika kulturális értéként való elfogadása és felfogása • Önbizalom a saját matematikai képességeit illetően, továbbá pozitív önkép fejlesztése 	<p>A matematikaórákon a diákok olyan számukra fontos és érdekes szituációkkal találkoznak, amelyeknél bemutathatják tudásukat, és felismerhetik, hogy a matematika célja a világ jobb megértése, és ebben az értelemben egy minőségibb élet megvalósítása.</p>	<p>-</p>

Differenciálás

A szakiskolai programot kiegészítő képzésben a matematika tanításánál kétfajta differenciálást vezetünk be.

1) A témakörök választhatósága a program alapján

A tantervben **KÖTELEZŐ** és **VÁLASZTHATÓ** témaköröket különböztetünk meg. A kötelező témakörök a szakiskolai programot kiegészítő képzés valamennyi típusában tárgyalásra kerülnek, a választható témakörök viszont csak a program jellegzetessége vagy az iskola döntése alapján. Az iskola a szakirány, illetve más körülmények alapján választhat ezek közül. **A tanmenetben a választható témakörök feldolgozására további matematikaórákat kell biztosítani.**

2) Az ismeretek differenciálása a szakmai érettségit választóknak

Azoknak a diákoknak, akik a matematikát választják a szakmai érettségien, az iskolának lehetővé kell tennie az utolsó évfolyamon az elsajátított tananyag elmélyítését és gyakorlását, lehetőség szerint külső differenciálással. **Ezeknek a diákoknak külön matematikaórákat is biztosítani kell.**

Kapcsolat a szakmai és más tantárgyakkal

A matematikaórákon figyelembe kell venni a tantárgyközi kapcsolatokat a szakmai és más területekkel. Ezek az összeköttetések többoldalúak és -rétegűek lehetnek:

- A diákok egyes matematikai fogalmakkal már előbb találkoznak más tantárgyankor. Ilyen esetekben ezek tárgyalása segít megérteni a matematikai fogalmakat, valamint a tanórán a matematikai definíció jobb és mélyebb elsajátítását eredményezi.
- Bizonyos fogalmakat a diákok először a matematikaórákon ismernek meg. Ebben az esetben ugyanezen tartalomnak egy másik tantárgynál történő tárgyalása segíti a matematika alkalmazhatóságának megismerését.
- Előfordul, hogy a diákok egyes tartalmakkal a matematikánál és más tantárgyankor egyidejűleg ismerkednek meg (pl. projektek).

A fogalmak bevezetéséhez valamennyi esetben, de főleg a harmadiknál, elengedhetetlen a matematika szakos és más tanárok csapatmunka keretei közt történő együttműködése.

Technológia

A technológia szakszerű alkalmazásának képessége fontos a matematikai problémák megoldása során, valamint a választott szakterületen a sikeres munkához és a továbbtanuláshoz is. A diákok a matematikaórákon megismerkednek a numerikus és a grafikus számológéppel, valamint a számítógépes programokkal, és használják azokat. Különböző számítógépes programokat alkalmaznak: pl. dinamikus geometriai, szimbólumos számításokat lehetővé tevő,

számítógépes táblázatkezelő, háromdimenziós modellkészítő és speciális tartalmakat megjelenítő programokat. Továbbá olyan egyéb, bizonyos szakmai területeken használatos szoftvereket, amelyek segítik a matematika tanulását vagy alkalmazását.

A technológia használata lehetővé teszi a komplex és valós szituációk tárgyalását, valamint a bonyolultabb matematikai folyamatok megtanulását. A technológia alkalmazásának készsége más tantárgyak sikeres elsajátítása szempontjából is fontos. A matematikaórákon továbbá felhasználásra kerülnek technológiai eszközök annak érdekében is, hogy a szerényebb számolási készségekkel rendelkező vagy a tudás elsajátításában hiányosságaik miatt akadályozott diákok is képesek legyenek megtanulni a tantárgyat.

A matematika szakos tanár szerepe

A szakiskolai programot kiegészítő képzésben a matematika szakos tanár az iskola „szakkörnyezetének” a része. Jól informálnak kell lennie azokról a szakterületekről, amelyeket a diákok tanulnak. A tanárnak ismernie kell a tevékenységeikhez használható technológiai eszközöket, a szaknyelvet, a munkájukhoz kapcsolódó szabályokat és módszereket, valamint szervezési feladatokat stb., mert csak így tudja a szakterület elemeit hitelesen és eredményesen beépíteni a matematikaórákba. Ennek okán a pedagógus képes lesz arra, hogy jobban megértse a diákokat, következésképpen pedig a diákok könnyebben fogadják el a személyét, valamint magát a matematikát szakmájuk és életük fontos alkotóelemeként.

A matematika szakos tanárnak a szakmai és más tantárgyak esetében az órák tervezése és végrehajtása során csapatban kell dolgoznia. Ennek köszönhetően a tanár mélyebb betekintést nyer a szakmai és más tantárgyakba, és közelebb tudja hozni kollégáit a matematikához és a matematikai kompetenciák tanításának filozófiájához, ami fontos a diákok sikeres tanulásához és fejlődéséhez az oktatás során, a szakmai területükön és a mindennapi életben. Így a tevékenységek és órák tervezése összehangolt és logikus lesz, aminek következtében a diákok matematikai ismeretei és kompetenciái megfelelően fejlődnek.

A kompetenciák sikeres fejlesztése érdekében fontos, hogy a tanulási folyamat résztvevői között olyan tiszteletteljes és korrekt viszony alakuljon ki, amelyben a tanárok és a diákok jogai, illetve kötelezettségei is egyértelműen körvonalazódnak. A diákoknak lehetőséget kell biztosítani, hogy részt vegyenek a matematikaórákon történő tevékenységek tervezésében és előkészítésében is (anyagok létrehozása vagy keresése). A matematika szakos tanároknak irányítaniuk kell a diákokat affelé, hogy a tevékenységekre reflektáljanak, azokról kritikusan gondolkozzanak, továbbá olyan helyzeteket kell teremteniük, ahol a diákoknak választási lehetőségeik vannak, és döntéseket hozhatnak. Az ilyenfajta hozzáállással a diákok magasabb szintű felelősségvállalása fejlődik saját döntéseiket és tudásukat illetően.

IV. OPERATÍV CÉLOK

Ez a fejezet a következő négy fő témából áll:

1. téma: SZÁMOK
2. téma: GEOMETRIA
3. téma: FÜGGVÉNYEK, EGYENLETEK ÉS DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS
4. téma: A LOGIKA ALAPJAI, AZ ADATFELDOLGOZÁS ÉS A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ALAPJAI

Az egyes témák több témakört tartalmaznak. Bizonyos témakörök minden szakképzési programban kötelezőek, néhány pedig választható.

A választható témakörök külön feltüntetésre kerültek, és azok közt a program vagy iskola a különböző szakmák sajátosságai és igényei szerint szelektálhat. Ezeknek a témának a tárgyalására további matematikaórákat kell biztosítani.

Mivel a matematikai ismeretek a belső összefüggésekre épülnek, ezért a szakiskolai programot kiegészítő képzésben rendkívül fontos a tantárgy oktatása és tanulása szempontjából, hogy az új tudás az előzőkre épüljön. Lényeges, hogy a középfokú szakmai és a szakiskolai programot kiegészítő képzés során elsajátított ismeretek összekapcsolódjanak. Figyelembe kell venni, hogy a diákok megfelelő mértékben sajátították el azokat a tudástartalmakat, amelyek a középfokú szakmai képzés tantervében az adott témaköröknél haladó fokú ismeretként szerepelnek.

A továbbiakban az egyes témakörök elején felsorolásra kerülnek azok a matematikai fogalmak, tartalmak és szimbólumok, amelyeket a diákok a szakiskolai tanulmányaik során elsajátítottak. Noha a diákok az említett fogalmakat és tartalmakat a középfokú szakmai képzésben már tanulták, mégis előfordulhat, hogy néhányan közülük azokat rosszul sajátították el vagy elfelejtették. A tanár a már korábban megismert tartalmakat nem tanítja újra, hanem olyan tevékenységet tervez, amelynek keretei közt a diákok önálló otthoni és/vagy iskolai keretek közt felelevenítik és kiegészítik a korábbi tudásukat. A tanár felismeri a hibásan elsajátított tartalmakat és hiányosságokat, továbbá segíti a diákokat azok kijavításában.

A tanév elején a tanár a diákok önálló munkájához olyan megfelelő tevékenységeket készít elő, amelyek lehetővé teszik a matematikai ismeretek összefoglaló átismétlését és rendszerezését. Egy-egy új téma vagy témakör bevezetésekor cél, hogy a diákok önálló munkával átismételjék azokat a matematikai alapismereteket, amelyek fontosak az új tartalom elsajátításához. A tanár segíti a diákokat a hibásan elsajátított tartalmak kijavításában, és pótolja a diákok tudásában észlelhető hiányosságokat.

1. téma: SZÁMOK

1.1. Alapvető ismeretek a számokról

A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:

A diák ismeri a természetes, egész, racionális és valós számokat, ezeket a számhalmazokat megkülönbözteti, és érti a köztük fennálló kapcsolatot ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

Képes a számokat különböző módon bemutatni (számokkal, betűkkel, pontokkal a számegyenesen). Rendezi a számokat a számegyenesen. Ismeri az aritmetikai műveletek elnevezését, és alkalmazza a műveletek tulajdonságait a számkifejezések értékének kiszámításánál. Tudja használni a számológépet. Meghatározza egy adott szám ellentett értékét és reciprokát. A törtet felírja tizedes tört alakban, továbbá megkülönbözteti a véges és végtelen szakaszos tizedes törtet, valamint felírja a tizedes tört alakú számokat tört alakban, és fordítva. Ismeri az oszthatósági relációt és a maradékos osztás tételét.

A diák tisztában van az osztó és többszörös fogalmával, meg tudja azokat határozni, valamint képes kiszámolni a számok legnagyobb közös osztóját és a legkisebb közös többszörösüket, ehhez felhasználja az euklidészi algoritmust. Meg tudja különböztetni a páros és páratlan számokat, és ismeri a 2-vel, 5-tel, 3-mal, 9-cel, 10-zel és a 10^n -nel vett oszthatósági szabályokat. Ismeri a természetes és egész kitevőjű hatványokat, és a velük végezhető műveleteket.

Megold egyszerű egyenlőtlenségeket.

Műveleteket tud végezni algebrai kifejezésekkel: összead, kivon, többtagú kifejezéseket szoroz, négyzetre emeli a kéttagú algebrai kifejezést, szorozza két tag összegét és különbségét. Kiemeli a közös tényezőt, és a négyzetek különbségét tényezőkre bontja. Kiszámítja az algebrai kifejezés helyettesítési értékét a változó adott értékére.

A diák ismeri a százalék, valamint az egyenes és fordított arányosság fogalmát. Alkalmazza a következtetési számítást.

A diák képes a négyzet- és köbgyökökkel műveleteket végezni, ehhez számológépet használ.

A diák meg tudja határozni a szám abszolút értékét.

Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák átismétli az alapfogalmakat, az eljárásokat és az aritmetikai műveleteket (a középfokú szakképzésben tanultak alapján).	A diák alkalmazza az összes aritmetikai műveletet.	A tanár olyan tevékenységeket tervez, amelyekkel a diákok önállóan át tudják ismételni az alapfogalmakat, műveleteket és aritmetikai összefüggéseket. A tanár felismeri, és amennyiben szükséges, pótolja a diákok hiányosságait, valamint javítja a hibásan elsajátított tudástartalmakat.
A diák műveleteket végez az algebrai kifejezésekkel.	A diák kiszámítja az algebrai kifejezés helyettesítési értékét. Egyszerűbb alakra hozza az algebrai kifejezéseket (összead, kivon, szoroz egytagú és többtagú kifejezéseket). Egyszerűbb alakra hozza a kéttagú kifejezés négyzetét	Ellenőrizni, majd figyelembe kell venni, hogy a diákok milyen tudást hoztak a középfokú szakmai képzésből. Először is jól be kell gyakorolni az egyes kifejezéseket. Lényeges, hogy a diák „összetett” kifejezéseket is egyszerűbb alakra hoz (négyzetre

	<p>és köbét, továbbá tényezőkre bontja az algebrai kifejezéseket. Ennek során a következő műveleteket használja: a közös tényező kiemelése, a négyzetek különbsége, a köbök különbsége és összege, valamint a háromtagú kifejezések Viéte-szabály alapján történő szorzattá alakítása.</p> <p>Műveleteket végez egyszerű algebrai törtekkel. Egyszerűsíti az emeletes törteket, és műveleteket végez velük.</p>	<p>emelés, köbre emelés, szorzás, szorzattá alakítás...).</p> <p>A gyakorlás hatékonyan folyhat csoportokban is. Figyelmet kell fordítani arra, hogy a diák ismerje meg a szimbólumos számítások elvégzésére is alkalmas számítógépes programokat.</p> <p>A hangsúlyt az algebrai törtek egyszerűsítésére és bővítésére kell helyezni.</p>
<p>A diák ismeri az intervallum fogalmát.</p>	<p>A diák ismeri az intervallum fogalmát, és ábrázolja, illetve felírja azt különböző módokon: grafikusan a valós számtengelyen, egyenlőtlenségjelekkel, halmazokkal.</p> <p>A diák megadja az egyenlőtlenség megoldását intervallummal.</p>	<p>A diákok az intervallumok különböző szimbólumos jelöléseit alkalmazzák.</p>
<p>A diák ismeri és érti a valós szám abszolút értékének fogalmát.</p>	<p>A diák ismeri és érti az abszolút érték definícióját. Alkalmazza az abszolút érték tulajdonságait, és műveleteket végez olyan kifejezésekkel, amelyekben abszolút értékek is szerepelnek. Megold egyszerű abszolút értéket tartalmazó egyenletet és egyenlőtlenséget. Megkülönbözteti az abszolút és a relatív hibát.</p>	<p>Hangsúlyozni kell az abszolút érték bemutatásának „geometriai” ábrázolását. Csak abszolút értéket tartalmazó számkifejezéseket, egyszerű egyenleteket és egyenlőtlenségeket old meg. Rá kell irányítani a figyelmet az adott szakma esetében az abszolút és a relatív hiba meghatározásának fontosságára.</p>
<p>A diák ismeri a tetszőleges fokú gyököket, és műveleteket végez velük.</p>	<p>A diák kiszámítja magasabb fokú gyökök értékét számológép segítségével. Az eredményt előzetesen megbecsli, majd ahhoz kritikával viszonyul. Egyszerűbb alakra hoz olyan aritmetikai és algebrai kifejezéseket, amelyekben tetszőleges fokú gyökök szerepelnek.</p>	<p>A diákok a középfokú szakmai képzést követően rendelkeznek előismeretekkel, de a magasabb fokú gyökök tárgyalása előtt mindenképpen tanácsos ellenőrizni és feleleveníteni a négyzet- és köbgyökökről tanultakat.</p> <p>A diák megtanulja a numerikus számológép használatát a magasabb fokú gyökök kiszámítása során.</p>
<p>A diák műveleteket végez a racionális kitevőjű hatványokkal.</p>	<p>A diák a gyököt átváltja racionális kitevőjű hatvánnyá, valamint a racionális kitevőjű hatványt gyökké.</p> <p>Aritmetikai és algebrai kifejezésekben racionális kitevőjű hatványokkal műveleteket végez.</p>	<p>A diák megtanulja a numerikus számológép használatát a racionális kitevőjű hatványok kiszámítása során.</p>

1.2. Komplex számok (választható témakör)		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák érti a komplex számok bevezetésének szükségességét, és fel tudja írni a komplex számot.	A diák ismeri és érti a $z = a + bi$ jelölést. A diák ábrázolja a komplex számot (ponttal, vektorral), a komplex számsíkon. A diák ábrázolja a komplex számok halmazát a komplex számsíkon.	Bemutatásra kerül a komplex számok bevezetésének szükségessége és a jelentősége a matematikában, valamint az adott szakma esetében.
A diák műveleteket végez komplex számokkal.	A diák összeadja, kivonja, szorozza és osztja a komplex számokat. Meghatározza a képzetes egység hatványainak értékeit, valamint a komplex szám konjugált és abszolút értékét, és mindkettőt ábrázolja a komplex számsíkon.	Összefüggés – összehasonlítás: műveletek kéttagú kifejezésekkel (műveletek vektorokkal)
A diák alkalmazza a komplex számokat (a másodfokú egyenletek megoldása során).	A diák megoldja a valós együtthatójú másodfokú egyenletet abban az esetben, ha annak diszkriminánsa negatív szám. Szorzattá alakítja a kifejezést a komplex számok halmazán.	

2. téma: GEOMETRIA

2.1. A sík- és térgeometria alapfogalmai

A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:

A pontok, egyenesek és síkok kölcsönös helyzetét a diák matematikai modell segítségével definiálja, és grafikus módon megjeleníti. Érti az egyenesek, valamint síkok párhuzamosságát és merőlegességét. A diák meg tudja adni a pont helyzetét a síkban, továbbá a térben a Descartes-féle koordináta-rendszerrel és a polárkoordináta-rendszerrel.

A diák alkalmazza a következő fogalmakat: a szög csúcsa, a szög szára (félegyenes), a szögek fajtái (null-, teljes-, egyenes- és derékszög; hegyes- és tompaszög), és ismeri a szögek közti összefüggéseket (mellék- és csúcscsögek).

A diák megméri a szögeket (szögfokban és szögpercben), és műveleteket végez velük, valamint geo háromszögvonalzóval és körzővel ($60^\circ, 30^\circ, 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 120^\circ$) megszerkeszti azokat.

Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák átismétli a korábbi tanulmányai során megismert geometriai alapfogalmakat a pontokról, az egyenesekről és a síkokról.		Az általános iskolából ismert alapfogalmakat nem kell újra megtanítani, hanem olyan tevékenységeket szükséges tervezni, amelynek keretei közt a diákok önálló otthoni és/vagy iskolai keretek közt felelevenítik és kiegészítik korábbi ismereteiket. A tanár felismeri a hibásan elsajátított tartalmakat és hiányosságokat, segíti a diákokat azok kijavításában.
A diák elfogadja a geometria alapaxiómáit.	A diák ismeri azokat az axiómákat, amelyek összekapcsolják a pontokat, az egyeneseket és a síkokat.	A tanár a geometriai fogalmak és a köztük fennálló összefüggések definiálásakor minden lehetséges matematikai eszközt alkalmaz: szakmai szempontból hibátlan szóbeli magyarázatot ad, szemléltet térbeli modellekkel, szerkesztéssel, illetve képekkel és matematikai szimbólumokkal.
A diák megkülönbözteti az axiómákat, a tételeket és a definíciókat.	A diák tudja, hogy a tételek az axiómákból származnak, továbbá azt, hogy az új fogalmakat definíciókkal határozzuk meg, pl. kollineáris, komplanáris pontok, konvex ponthalmazok.	A diákok az axiómákat olyan alapvető matematikai igazságokként fogják fel, amelyekre a geometria épül.

<p>A diák alkalmazza a matematikai nyelvezetet.</p>	<p>A diák alkalmazza a matematikai nyelvezetet és szakkifejezéseket a fogalmak definiálásánál, a kölcsönös helyzetek, illetve összefüggések leírásánál és bemutatásánál, valamint a megismert bizonyítások bemutatásánál és logikus magyarázatánál. Bemutat és értelmez egy ismert bizonyítást (pl. tétel(ek) a sík egyértelmű meghatározottságáról). Megkülönbözteti a modelleket és a fogalmakat.</p>	<p>A diák alkalmazza a matematikai nyelvezetet a matematikai kommunikáció során. A tevékenységek lehetnek szóbeli prezentációk, bemutatók, csoport- és projektmunkák.</p>
<p>A diák átismétli a szög fogalmáról tanultakat.</p>	<p>A diák írásbeli vagy szóbeli ellenőrzés során számot ad arról, milyen mértékben sajátította el a tananyagot.</p>	<p>A diákok önállóan átismétlik a szögekről tanult fogalmakat, pl. plakátot vagy kivonatokat kreálnak, szemináriumi dolgozatot írnak, számítógépes bemutatót készítenek... A tanár felismeri, és szükség esetén kijavítja a tudásbéli hiányosságokat.</p>
<p>A diák ismeri az egyes szögfajtákat és a köztük fennálló összefüggéseket.</p>	<p>A diák kiszámítja a pótszögeket és a mellékszögeket. Felismeri és alkalmazza a párhuzamos egyenesek mentén keletkező szögek és a merőleges szárú szögpárok közti összefüggéseket.</p>	
<p>A diák ismeri a szögmérés mértékegységeit, és a szögekkel tud műveletek végezni.</p>	<p>A diák bővíti a következő ismeretekkel a szögmérés mértékegységeiről elsajátított tudását: szögmásodpercekkel is végez számításokat, megismeri a radiánt, és át tudja váltani a szögfokokat radiánokba, és fordítva. Eközben önállóan használja a numerikus számológépet. Fejben átváltja a következő szögeket szögfokokból radiánba, és fordítva: (pl. $60^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 120^\circ \dots$) Önállóan kiszámítja a szögek nagyságát. Megkülönbözteti a pozitív és negatív elfordulású szögeket.</p>	<p>A diákok megtanulják a numerikus számológép használatát a szögmérés mértékegységének átváltásánál: a tízesből a hatvanas számrendszerbe, és fordítva, valamint szögfokokból radiánokba, és fordítva.</p>
<p>A diák meg tudja szerkeszteni a szögeket körző és geo háromszögvonalzó használatával.</p>	<p>A diák szakmája sajátosságainak megfelelően, geo háromszögvonalzóval vagy körzővel megszerkeszti a teljesszögnél kisebb szögeket. A diák ismeri a szimmetriatengely fogalmát, és dinamikus geometriai programmal is megszerkeszti az adott szakasz szakaszfelező merőlegesét vagy az adott szög szögfelező egyenesét.</p>	<p>A klasszikus geometriai szerkesztések közül csak az egyszerűbbeket (szögek, szakaszfelező merőleges, szögfelező egyenes) hajtják végre geometriai eszközökkel, és azokat is csupán az adott szakmai terület által megkövetelt terjedelemben.</p>

2.2. A sík leképezései

A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:

A diák képes megszerkeszteni a szakaszfelező merőleget és a szögfelező egyenest, valamint ismeri és alkalmazza a rájuk illeszkedő pontok tulajdonságait. Ismeri és alkalmazza az egybevágósági transzformációt, a pont körüli elforgatást, a tükrözést és a hasonlósági transzformációkat (nyújtás/zsugorítás). A szakasz egybevágó részekre történő felosztásánál alkalmazza a párhuzamos szelők tételét.

Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák átismétli az alapvető síkbeli leképezéseket.		Az alapfogalmakat nem kell újra megtanítani. A diákok önálló munkával átismétlik azokat: pl. ellenőrzik egy geometriai konfiguráció tulajdonságait (vizsgálja a szimmetriát, a középpontos zsugorítást/nyújtást...). A tanár felismeri, és amennyiben szükséges, pótolja a diákok hiányosságait.
A diák érti és alkalmazza az egybevágóság és hasonlóság fogalmát.	A diák ismeri az arány fogalmát és a szakaszok aránypárját. Alkalmazza a megfelelő stratégiákat, és összekapcsolja a síkgeometria tartalmait (pl. ábrát készít, átlát a szituáción, analizálja az összefüggéseket, felosztja a síkidomot részekre – háromszögekre, összekapcsolja a síkidomokat és a koordináta-rendszert).	A dinamikus geometriai programokat a diákok elsősorban az önálló kísérletezéshez használják. Bizonyos síkgeometriai tartalmak a koordináta-rendszerrel is összefüggenek: pl. a pont helyzete, mértani leképezések.

2.3. Mértani síkidomok

A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:

- Kör és a kör részei: a diák ismeri és képes megszerkeszteni a kört (körvonalat), a húrt, a körívet, a körcíkket és körszeletet. Képes felismerni az egyenes és a körvonal, illetve két körvonal kölcsönös helyzetét.
- Háromszög: a diák tisztában van a háromszög belső és külső szögeinek összegével, a háromszög-egyenlőtlenséggel, a háromszögek fajtaival annak oldalai és szögei alapján, a háromszög magasság- és súlyvonalaival és súlypontjával. Alkalmazza a hasonló és egybevágó háromszögekkel kapcsolatos ismereteit szerkesztési és számítási feladatoknál.
- Négyszög: a diák ismeri a téglalapot, négyzetet, paralelogrammát, rombuszt, trapézt, egyenlő szárú trapézt. Alkalmazza a négyszögek tulajdonságait (oldalegyenesek kölcsönös helyzete, a szögek és átlók) szerkesztési és számítási feladatoknál.
- Szabályos sokszögek: a diák ismeri a szabályos sokszögek jellemzőit, megkülönbözteti egyes típusait oldalai és szögeik száma alapján.
- A diák képes kiszámolni a síkidomok kerületét és területét a megfelelő képletek segítségével. Felhasználja a Pitagorasz-tételt.
- A diák tisztában van a hosszúság, terület (valamint a térfogat, idő, tömeg és hőmérséklet) mértékegységeivel, és tudja őket váltogatni.

Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák átismétli a mértani síkidomok definícióit és tulajdonságait.	A diák alkalmazza a háromszög belső és külső szögei, valamint az háromszög oldalai és szögei közt fennálló összefüggéseket.	A diákok önállóan átismétlik a síkidomokról tanult alapfogalmakat, pl. síkidommodelleket konstruálnak, plakátot vagy kivonatokat készítenek, szemináriumi dolgozatot írnak, számítógépes prezentációt alkotnak... A tanár felismeri, és amennyiben szükséges, pótolja a diákok hiányosságait.
A diák ismeri a kerületi és középponti szögek tételét.	A diák ismeri és alkalmazza szerkesztési és számítási feladatoknál az ugyanazon az íven fekvő kerületi és középponti szögek közti összefüggést (a félkörnél a Thalész-tételt is). Megerkeszti a kör külső pontjából a körhöz húzható érintőket.	A diákok geometriai eszközökkel a klasszikus szerkesztések közül csak az egyszerűbbeket hajtják végre, és azokat is csupán az adott szakmai terület által megkövetelt terjedelemben.
A diák megkülönbözteti az egybevágó és hasonló háromszögeket.	A diák ismeri az egybevágó háromszögek axiómáját és tételeit. Ismeri a hasonló háromszögek definícióját és az azzal kapcsolatos tételeket is.	A tanár a fogalmakat, összefüggéseket és tulajdonságokat a mindennapi életből vett, valamint az adott szakmai területhez kapcsolódó problémák megoldásával vezeti fel és mutatja be.
A diák tud háromszögeket, négyszögeket és szabályos sokszögeket szerkeszteni.	A diák végrehajtja az alapvető szerkesztési feladatokat geometriai eszközökkel, és leírja annak menetét.	A diákok önállóan kísérleteznek, amelynek során a háromszögek az oldalai és szögei között fennálló összefüggéseket különböző kritériumok szerint (pl. a háromszög-egyenlőtlenség, a szögek nagysága és az oldalak hosszúság alapján) csoportosítják. A diákok megvizsgálják egy geometriai konfiguráció tulajdonságait (pl. tanulmányozzák, mely nevezetes pontok kerülhetnek a háromszögon kívülre).
A diák ismeri és alkalmazza a síkgeometria alapvető tételeit (Pitagorasz-tétel, befogó- és magasságtétel, valamint a párhuzamos szelők tétele).	A diák alkalmazza az alapvető tételeket a háromszög elemeinek meghatározása, a szerkesztési feladatok és az összetettebb geometriai problémák megoldása során. Bemutat és logikusan értelmez egy ismert bizonyítást (pl. a belső szögek összege).	A síkidomok és tételek tárgyalása részben deduktív, részben pedig leíró módszeren alapul.

2.4. A hegyesszögek szögfüggvényei		
A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:		
A diák képes numerikus számológép segítségével meghatározni tetszőleges szög szögfüggvényének értékét, valamint ábrázolni azt az egységkörben.		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák átismétli a szögfüggvényekről korábban tanultakat.		A diákok önállóan átismétlik a szögfüggvényekről tanult alapfogalmakat és a köztük fennálló összefüggéseket, pl. plakátot vagy kivonatokat készítenek, szemináriumi dolgozatot írnak, számítógépes prezentációt alkotnak... Felelevenítik, miként lehet számológép segítségével meghatározni a szögfüggvények értékeit. A tanár felismeri, és szükség esetén kijavítja a tudásbéli hiányosságokat.
A diák meghatározza a szögfüggvények értékeit különféle szögmértékek esetében.	A diák meghatározza a szögfüggvények értékét abban az esetben, ha a szögek nagyságát szögfokokban (percekben, másodpercekben) vagy radiánokban adják meg. A diák alkalmazza a szögfüggvények pontos értékét a következő szögekre: $60^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 0^\circ$. A diák érti az összefüggéseket a pótszögek szögfüggvényei között. Használja a numerikus számológépet és a trigonir eszközt.	A tanár különböző technológiákat használ a koordináta-rendszer és az egységkör összefüggésének bemutatására. A hangsúly a szög nagysága és a szögfüggvények értéke közti összefüggések elsajátítására, valamint a különféle síknegyedekben a szögfüggvények előjelének a változására kerül. A diákok önálló kísérleteket és vizsgálódásokat végeznek. Eközben olyan mértékben használják a dinamikus geometriai programokat, amennyit a szakmai területük megkövetel.
A diák ismeri és alkalmazza a szinusz- és koszinusztételt.	A diák alkalmazza a szinusz- és koszinusztételt a háromszög ismeretlen oldalainak és szögeinek kiszámításakor. A tételeket a tetszőleges háromszögek – és ezzel tetszőleges sokszögek – oldalhosszúsága és szögnagyságai kiszámításának alapvető módszereként fogja fel. Használja a numerikus számológépet.	A diákok a mindennapi életből vett feladatok és problémák segítségével gyakorolják a háromszögek ismeretlen oldalainak és szögeinek kiszámítását.
A diák kiszámítja a háromszög beírt és körülírt körének sugarát.	A diák alkalmazza a beírt és körülírt kör sugarának képleteit. Használja a numerikus számológépet.	A tanár a mindennapi életből és környezetből származó, valamint az adott szakmai területhez kapcsolódó példákat keres.
A diák kiszámítja a szakaszok hosszúságát, a síkidomok kerületét és területét.	A diák a már ismert képletekkel kiszámítja egy tetszőleges háromszög és az összetett síkidomok kerületét és területét, alkalmazza a Hérón-képletet, továbbá a szögfüggvényekkel összefüggő más formulákat is. Új jelölést használ a síkidomok területére (S). A síkidomok különböző elemeinek (pl. magasság,	A hangsúly az általános háromszög oldalhosszúságainak és szögméreteinek kiszámításán, a szinusz- és koszinusztételen, valamint a Hérón-képlet alkalmazásán van.

	átló...) kiszámításához indirekt feladatokat old meg. Aránypárral is kiszámolja az oldalhosszúságokat. A diák az eredményeket megbecsli, azokat ellenőrzi, mialatt odafigyel a mértékegységekre. Használja a numerikus számológépet.	
A diák megold összetettebb geometriai problémákat.	A diák alkalmazza a megfelelő stratégiákat, és azokat összekapcsolja a síkgeometria tartalmaival (pl. ábrát készít, átlát a szituáción, analizálja az összefüggéseket: felosztja a síkidomot részekre - háromszögekre, összekapcsolja a síkidomokat a koordináta-rendszerrel.	A diákok önálló kísérleteket és vizsgálatokat végeznek. Eközben használják a dinamikus geometriai programokat is.

2.5. Mértani testek		
A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:		
A diák ismeri a következő testeket és azok tulajdonságait: egyes hasáb, egyenes henger, egyenes gúla, egyenes kúp és a gömb, valamint képes vázlatokat rajzolni. Ki tudja számítani a magasságok és átlók hosszúságát, a szögek nagyságát, továbbá a mértani testek felszínét és térfogatát. El tudja készíteni bonyolultabb geometriai testek hálóját is.		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák átismétli az alapfogalmakat a mértani testekről.		A diákok önállóan átismétlik a mértani testekről tanult alapfogalmakat, pl. elkészítik a testek modelljeit és hálóját, plakátot vagy kivonatokat készítenek, szemináriumi dolgozatot írnak, számítógépes bemutatót készítenek... A tanár észleli, és szükség esetén kijavítja a tudásbéli hiányosságokat.
Hasáb és henger	A diák a hasábot tetszőleges alaplapú testként fogja fel. Kiszámol összetett feladatokat numerikus számológéppel. A diák a számítások során az eredményeket megbecsli, kritikus módon viszonyul a kapott eredményekhez, mindeközben odafigyel a mértékegységekre.	A diákok elkészítik a testek modelljeit, kutatást végeznek, továbbá dinamikus geometriai programokkal feladatokat oldanak meg. A mindennapi életükben, környezetükben vagy saját szakmai területükön megkeresik a testek modelljeit, és azokkal kapcsolatban különböző mennyiségeket számítanak ki.
Gúla és kúp	A diák a gúlát tetszőleges alaplapú testként fogja fel. Kiszámít összetett feladatokat numerikus számológép használatával. A diák a számítások során az eredményeket megbecsli, kritikus módon viszonyul a kapott eredményekhez, mindeközben odafigyel a mértékegységekre.	A diákok elkészítik a testek modelljeit, kutatást végeznek, továbbá dinamikus geometriai programokkal feladatokat oldanak meg. A mindennapi életükben, környezetükben vagy saját szakmai területükön megkeresik a testek modelljeit, és azokkal kapcsolatban különböző mennyiségeket

		számítanak ki.
Forgástestek és gömb	A diák a hengert, a kúpot és a gömböt forgástestként értelmezi. Meghatározza a forgástengelyt, és a tengely megválasztása alapján elemzi a keletkezett testet.	A diákok önállóan kutatásokat és kísérleteket végeznek. Eközben használják a dinamikus geometriai programokat.
A diák megold összetettebb térgeometriai problémákat.	A diák alkalmazza a megfelelő stratégiákat, és összekapcsolja a síkgeometria egyes tartalmait (pl. ábrát készít, átlát a szituáción, analizálja az összefüggéseket, alkalmazza a sík- és a térgeometria fogalmait).	A diákok önálló kutatásokat és kísérleteket végeznek. Eközben használják a dinamikus geometriai programokat.

2.6. Másodrendű görbék (választható témakör)		
A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai: Mértani alapfogalmak: pont, egyenes, szakasz, körvonal (a mértani ponthalmaz helyeként), szimmetriatengely Tükrözés és szimmetria Koordináta-rendszer, lineáris és másodfokú függvény Egyenletek és egyenletrendszerek		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák megismeri azokat a görbéket, amelyek a kúp és a kettős kúp síkmetszeteként jönnek létre.	A diák a szaktantárgyagnál (pl. műszaki rajz, mérések) elsajátított tudását felhasználva felismeri azokat a görbéket, amelyek a kettős kúp síkmetszeteként keletkeznek: körvonal, ellipszis, hiperbola, parabola.	A tanár segíti a diákokat abban, hogy matematikai és specifikus szakmai előismereteiket össze tudják kapcsolni. Ehhez használja a szakmai tantárgy által nyújtott lehetőségeket, pl. mintafeladatok, termékek, számítógépes programok és más technológia.
A diák összekapcsolja a körvonalat a koordináta-rendszerrel.	A diák felírja a középponti és az $S(p, q)$ középpontban eltoltt helyzetű körvonal egyenletét. Elemzi a kör és az egyenes, valamint két körvonal kölcsönös helyzetét, továbbá kiszámítja a távolságokat és a metszéspontok koordinátáit.	A diákok önállóan vizsgálatokat és kísérleteket végeznek. Ehhez grafikus számológépet, szimbólumokkal végzett számításokhoz alkalmas számítógépes, dinamikus geometriai és a szakterületükön megismert programokat használnak.

<p>A diák összekapcsolja az ellipszist, a hiperbolát és a parabolát a koordináta-rendszerrel.</p>	<p>A diák alkalmazza az ellipszis és a hiperbola középponti helyzetű, valamint a parabola csúcsponti egyenletét. A szakmai követelményektől függően a $v = (p, q)$ vektorral párhuzamosan eltolt görbeegyenleteket is alkalmazza. Elemzi a görbék és egyenesek kölcsönös helyzetét a koordináta-rendszerben. Ehhez a megfelelő számítógépes programokat használja.</p>	<p>A diákok önállóan vizsgálatokat és kísérleteket végeznek. Ehhez dinamikus geometriai és a szakterületükön megismert programokat használnak.</p>
--	---	--

<p>2.7. Vektorok (választható témakör)</p>		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
<p>A diák ismeri és alkalmazza a vektorok grafikus szemléltetését.</p>	<p>A diák síkban szemlélteti a vektort irányított szakasszal. Ábrázolja a koordinátaival megadott $a = (a_1, a_2)$ vektort a koordináta-rendszerben. Meghatározza a koordináta-rendszerben lévő ponthoz tartozó helyvektor koordinátáit.</p>	<p>A diák összehasonlítja a vektorok ábrázolását a koordináta-rendszerben a komplex számok komplex számsíkban történő ábrázolásával.</p>
<p>A diák összead és kivon vektorokat. A vektort megszorozza egy skalárral.</p>	<p>A diák grafikusán és analitikusan összead és kivon vektorokat. Grafikus és analitikus módszerrel beszorozza a vektort egy skalárral. A kifejezések egyszerűbb alakra hozásakor alkalmazza az összeg és a skalárral való szorzás tulajdonságait.</p>	<p>A tanár a vektorok ábrázolásánál különböző technológiai eszközöket használ (pl. dinamikus geometriai programokat).</p>
<p>A diák ismeri és alkalmazza a vektorok lineáris kombinációját, a kollinearitást, a komplanaritást és a bázis fogalmakat.</p>	<p>A diák ismeri és alkalmazza a vektorok lineáris kombinációjának fogalmát. Ismeri és alkalmazza a kollinearitást és komplanaritást fogalmakat. Grafikus és analitikus módon kifejezi az adott vektort két nem kollineáris vektor lineáris kombinációjaként (vektorok felbontása összetevőkre).</p>	<p>A diák alapszintű feladatokat old meg. A tanár kapcsolatot teremt a fizikával, konkrétan az erők összetevőkre történő felbontásának kérdésével.</p>
<p>A diák kiszámítja a vektorok skaláris szorzatát.</p>	<p>A diák kiszámítja a vektorok skaláris szorzatát. Ismeri és alkalmazza a skaláris szorzat tulajdonságait. Kiszámítja a vektor hosszúságát. Kiszámítja két vektor hajlásszögét. Megállapítja, hogy két vektor párhuzamos vagy merőleges-e.</p>	<p>A tanár hangsúlyozza a tantárgyközi kapcsolatokat (a fizikából ismert mennyiségek közül a sebesség, a gyorsulás és az erővektorok fogalmával), valamint a vektorok jelentőségét a szakmai tantárgyak tekintetében.</p>

3. téma: FÜGGVÉNYEK, EGYENLETEK ÉS DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

3.1. Függvény és egyenlet		
<p>A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai: A diák alkalmazza a síkbeli koordináta-rendszert, és leírja a tulajdonságait. A diák meg tudja különböztetni egy mennyiség függvényét a másiktól, és ezt az összefüggést képes táblázattal és grafikonnal bemutatni. Kritikusan képes előrelátni, hogy az egyik mennyiség változása mennyiben függ a másik mennyiség alakulásától. A diák rendelkezik alapvető tapasztalatokkal a modellezésről és annak alkalmazásáról.</p>		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák (a középfokú szakmai képzéséből) feleleveníti a koordináta-rendszerről, a mennyiségek összefüggéseiről, a függvényekről és az egyenletekről tanult alapvető fogalmakat.		A már ismert tartalmakat nem kell újra megtanítani, hanem olyan tevékenységeket kell tervezni, amelyek keretei közt a diákok önálló otthoni és/vagy iskolai keretek közt felelevenítik és kiegészítik korábbi ismereteiket. A tanár felismeri a hibásan elsajátított tartalmakat és hiányosságokat, segíti a diákokat azok kijavításában.
A diák bővíti a koordináta-rendszerről elsajátított tudását.	A diák alkalmazza a derékszögű koordináta-rendszer tulajdonságait a síkbeli ponthalmazok helyének ábrázolására. Ismeri a pontok távolságának fogalmát, és tisztában van annak tulajdonságaival. Meghatározza a pontok távolságát.	
A diák ismeri a függvény definícióját.	A diák ismeri a függvény általános definícióját és a valós-valós függvény meghatározását. Alkalmazza a függvény különböző megjelenítési módjait: az egyenletet (hozzárendelési szabály), a táblázatot és a grafikont.	A függvények különböző fajtáit a diákok szakmai területéről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett jelenségek modelljeként, példákkal kell bevezetni. A grafikonok ábrázolásához grafikus számológépet vagy számítógépes programokat használnak.

<p>A diák felismeri a valós-valós függvény tulajdonságait.</p>	<p>A diák ismeri a szűrjektív, injektív és bijektív függvények tulajdonságait. Felírja a függvény értelmezési tartományát, értékészletét, megállapítja a függvény folytonosságát, meghatározza azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény pozitív, illetve negatív, leírja a függvény növekedésének és csökkenésének intervallumait, leírja a függvény lokális szélsőértékeit, megállapítja, hogy a függvény páros, illetve páratlan-e, meghatározza, melyik intervallumokon konvex, illetve konkáv, megadja a függvény periodicitását és az aszimptotákat.</p>	<p>Ennek a célnak az elérése folyamatosan történik a szakiskolai programot kiegészítő képzésben. A diákok az egyes függvények vizsgálata előtt a függvényt elsősorban a grafikonja alapján, valamint a hozzárendelési szabállyal képviselt valós jelenségek megértésével elemzik. A diákok a függvény tulajdonságainak tanulmányozása során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak. Az adott tulajdonságok analitikus módszerrel történő mélyrehatóbb tárgyalására az egyes függvényeknél kerül sor.</p>
<p>A diák elvégzi a függvények párhuzamos eltolásait és nyújtásait/zsugorításait.</p>	<p>A diák a hozzárendelési szabályban megleli az alapfüggvényt, és felismeri az abszcissza, illetve ordináta-tengely irányába történő párhuzamos eltolást, valamint a középpontos nyújtást/zsugorítást. A technológiai eszközök használatával ábrázolja az alapfüggvények és az eltolt, illetve nyújtott/zsugorított függvények grafikonjait.</p>	<p>Ennek a célnak az elérése folyamatosan történik a szakiskolai programot kiegészítő képzés során. A diákok az egyes függvények tárgyalása előtt a függvények párhuzamos eltolásait és nyújtásait/zsugorításait grafikus számológéppel, számítógépes programokkal, valamint a hozzárendelési szabállyal leírható valós jelenségek megértésével tanulmányozzák.</p>
<p>A diák technológiai eszközök segítségével megoldja az egyenleteket, egyenlőtlenségeket, valamint az egyenletrendszereket és egyenlőtlenségrendszereket.</p>	<p>A diák technológiai eszközök segítségével megoldja az egyenleteket, az egyenlőtlenségeket, valamint az egyenlet- és egyenlőtlenségrendszereket. Érti az algebrai és grafikus módszerrel kapott megoldásokat, ellenőrzést végez, valamint elmagyarázza a megoldási folyamatot és a megoldás értelmét.</p>	<p>Ennek a célnak az elérése folyamatosan történik a szakiskolai programot kiegészítő képzés során. Az egyes egyenlet-, egyenlőtlenség-, egyenletrendszer-, egyenlőtlenségrendszer-típusok tárgyalása előtt a diákok elsősorban grafikus módszerrel közelítik meg a megoldást, és valós jelenségek megértésével tanulmányozzák az adott hozzárendelési szabályokat. Ehhez grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak. Az analitikus megoldási módszer az egyes függvény-, egyenlet-, egyenlőtlenség-, egyenletrendszer és egyenlőtlenségrendszer-típusok mélyrehatóbb tárgyalásánál kerül megtanításra.</p>

<p>A diák matematikai modellt készít, és azt alkalmazza.</p>	<p>A diák a jelenség bemutatásához a legmegfelelőbb matematikai modellt választja. Kritikus módon viszonyul a választásához és használja azt.</p>	<p>Ennek a célnak az elérése folyamatosan történik a szakiskolai programot kiegészítő képzés során. A diákok szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből származó valós jelenségeket elemeznek. A modellkeresés és -készítés során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak. A matematikai modellek készítése és alkalmazása a legtöbb témakörnél előkerül, a „Függvények, egyenletek és differenciálszámítás” című fejezetben pedig a függvények, egyenletek és egyenlőtlenségek értelmezése során még különlegesebb szereppel bír. Érdekes olyan tantárgyközi projektekbe is bekapcsolni, amelyekben a matematika szakos tanár közreműködik.</p>
---	---	--

3.2. Lineáris függvény és lineáris egyenlet

A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:

A diák megkülönbözteti a lineáris összefüggést a többi összefüggéstől, valamint a lineáris összefüggést leírja egyenlettel. Ismeri a lineáris függvény tulajdonságait, kiszámítja a zérushelyét, továbbá az irányítványozóból következtet az egyenesek párhuzamosságára, illetve merőlegességére. Különböző módszerekkel ábrázolja a lineáris függvény grafikonját, az irányítványozót és a 0 helyen felvett helyettesítési értéket is figyelembe véve.

A diák különböző módszerekkel képes megoldani a lineáris egyenletet, ekvivalens átalakításokkal is. Megold olyan szöveges feladatot, amelyben lineárisan összefüggő mennyiségek szerepelnek, fel tudja írni a megfelelő lineáris egyenletet is, azt megoldja, majd az eredményt megfelelő módon értelmezi.

A diák modellezi a szakmájában előforduló és a mindennapi életből vett valós jelenségeket lineáris függvényvel. A modellválasztáshoz és annak alkalmazásához kritikusán viszonyul.

Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
<p>A diák feleleveníti a lineáris összefüggésről, a lineáris függvényről, a lineáris függvény grafikonjáról, az egyenes egyenletének explicit alakjáról és a lineáris egyenletről tanultakat.</p>		<p>A már ismert tartalmakat nem kell újra megtanítani, hanem olyan tevékenységeket kell tervezni, amelynek keretei közt a diákok önálló otthoni és/vagy iskolai keretek közt felelevenítik és kiegészítik korábbi ismereteiket. A tanár felismeri a hibásan elsajátított tartalmakat és hiányosságokat, segíti a diákokat azok kijavításában.</p>
<p>A diák alkalmazza a lineáris függvény tulajdonságait.</p>	<p>A diák alkalmazza a lineáris függvény és az együtthatók alapvető tulajdonságait. Az irányítványozók</p>	<p>A diákok elsajátítják a lineáris függvény számokra új tulajdonságait. Ehhez grafikus számológépet és</p>

	alapján következtet az egyenesek párhuzamos vagy merőleges voltára, és felírja a lineáris függvény egyenletét.	számítógépes programokat használnak.
A diák alkalmazza az egyenes egyenletének különböző alakjait.	A diák megkülönbözteti a hozzárendelési szabályt az egyenes egyenletétől. Ismeri az egyenes egyenletének explicit, implicit és tengelymetszetes alakját, valamint ezekben az egyenletekben az együtthatók jelentését. Értelemszerűen átváltja az egyenes egyik alakját a másikba.	A diákok olyan feladatokat és problémákat oldanak meg, amelyek rámutatnak arra, hogy szükségszerűek az egyenes egyenletének különböző alakjai.
A diák felismeri és megoldja a lineáris egyenlőtlenséget.	A diák analitikus módon és a technológia segítségével megoldja a lineáris egyenlőtlenséget. Érti az algebrai és grafikus módszerrel kapott megoldásokat, ellenőrzést végez, valamint elmagyarázza a megoldási folyamatot és annak értelmét.	A diákok az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek, valamint egyenletrendszerek és egyenlőtlenségrendszerek megoldása során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak abban az esetben,
A diák felismeri és megoldja a lineáris egyenletrendszert vagy a lineáris egyenlőtlenségrendszert.	A diák analitikus módon és a technológia segítségével megoldja a lineáris egyenletrendszert, illetve egyenlőtlenségrendszert. Érti az algebrai és grafikus módszerrel kapott megoldásokat, ellenőrzést végez, valamint elmagyarázza a megoldási folyamatot és a megoldás értelmét.	<ul style="list-style-type: none"> • amikor az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldási eljárásait tanulják technológiai eszközök segítségével, • amikor a tevékenység célja az, hogy az egyenlet, illetve egyenlőtlenség értelmét és megoldását jobban megértsék, • amikor a diákok olyan egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket oldanak meg, amelyek a mindennapi életből vett problémákból adódnak, és éppen ezért komplexebbek és nehezebbek, • amikor az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldása nem az elsődleges cél, hanem az csak egy fázisa egy nagyobb feladatnak vagy projektnek. <p>Ha a tevékenység célja az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldási folyamatának megtanulása, akkor a technológia a gondolkodást irányító vagy a megoldás ellenőrzését szolgáló eszközként funkcionál. Amennyiben lehetséges, úgy az egyenletek, egyenlőtlenségek és egyenletrendszerek technológiai eszközök nélküli megoldása bővebb kontextusban kapjon értelmet.</p>

3.3. Hatványfüggvények és magasabb fokú egyenletek		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák felismeri a hatványfüggvénnyel leírható összefüggéseket, és azt megkülönbözteti a többi fajta összefüggéstől.	A diák felismeri a hatványfüggvénnyel leírható összefüggéseket különféle megjelenítési módok alapján (szöveg, táblázat, grafikon). Megkülönbözteti a hatványfüggvénnyel leírható összefüggéseket a lineáristól.	A hatványfüggvények különböző példáit a diákok szakmai területéről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett jelenségek modelljeként, példákkal érdemes bevezetni.
A diák felírja a hatványfüggvénnyel leírható összefüggéseket egyenlettel.	A diák a mennyiségek hatványfüggvénnyel leírható összefüggéseit szimbólumokkal, a következő egyenlettel írja fel: $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$	Az egyenlet szimbólumokkal történő felírását a diákok szakmai területéről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett példák alapján érdemes bevezetni.
A diák ismeri és alkalmazza a hatványfüggvény tulajdonságait.	A diák ismeri a hatványfüggvények tulajdonságát, és alkalmazza azt a grafikonok ábrázolásakor, valamint más feladatoknál: belátja a hatványfüggvény folytonosságát, meghatározza azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény pozitív, illetve negatív, leírja a függvény növekedésének és csökkenésének intervallumait, leírja a függvény lokális szélsőértékeit, megállapítja, hogy a függvény páros vagy páratlan-e, valamint azt, melyik intervallumokon konvex, illetve konkáv. A diák felismeri a hatványfüggvények tulajdonságait, és ellenőrizni tudja azokat analitikus és grafikus módon is.	A diákok először technológiai eszközök használata nélkül, pontonként ábrázolják legalább egy alapfüggvény grafikonját. Ezután grafikus számológéppel vagy számítógépes programmal ábrázolják az elemi hatványfüggvények grafikonját, és meghatározzák annak tulajdonságait. Ezek után következik csak a hatványfüggvények tulajdonságainak tárgyalása analitikus módon.
A diák ábrázolja a hatványfüggvény grafikonját.	A diák ábrázolja az $f(x) = a(x-p)^n + q$ hatványfüggvény grafikonját, figyelembe véve a hatványfüggvények tulajdonságait, a párhuzamos eltolásokat és nyújtásokat/zsugorításokat. Értelmezi a függvény alapgrafikonjának párhuzamos eltolásaival és nyújtásaival/zsugorításaival létrejövő végleges grafikonját.	A diákok a párhuzamos eltolásokról és nyújtásokról/zsugorításokról elsajátított tudásuk felhasználásával, valamint grafikus számológép vagy számítógépes program segítségével vizsgálják a hatványfüggvények eltolt és nyújtott/zsugorított grafikonjait. Ezek után technológiai eszközök használata nélkül is ábrázolják a grafikonokat.
A diák meghatározza a hatványfüggvény inverz függvényét, és ábrázolja a gyökfüggvény grafikonját.	A diák analitikus és grafikus módszerekkel meghatározza az alapvető hatványfüggvény inverz függvényét. Ismeri a gyökfüggvény tulajdonságait, és ábrázolja annak grafikonját.	A diákok a gyökfüggvény tulajdonságainak vizsgálata során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak. Az eltolt és nyújtott/zsugorított gyökfüggvények grafikonjait

		technológiai eszközökkel ábrázolják.
A diák felismeri és megoldja a magasabb fokú egyenleteket és egyenlőtlenségeket.	A diák analitikus és grafikus módszerekkel megoldja a magasabb fokú egyenletet, illetve egyenlőtlenséget. Érti az algebrai és grafikus módszerrel kapott megoldásokat, ellenőrzést végez, valamint elmagyarázza a megoldási folyamatot és a megoldás értelmét.	<p>A diákok a hatványokat tartalmazó egyenletek, illetve egyenlőtlenségek analitikus megoldási módját összekapcsolják a grafikus módszerrel. Az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldása során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak abban az esetben,</p> <ul style="list-style-type: none"> • amikor az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldási eljárásait tanulják technológiai eszközök segítségével, • amikor a tevékenység célja az, hogy az egyenlet, illetve egyenlőtlenség értelmét és megoldását jobban megértsék, • amikor a diákok olyan egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket oldanak meg, amelyek a mindennapi életből vett problémákból adódnak, és éppen ezért komplexebbek és nehezebbek, • amikor az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldása nem az elsődleges cél, hanem csak egy fázisa egy nagyobb feladatnak vagy projektnek. <p>Ha a tevékenység célja az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldási folyamatának megtanulása, akkor a technológia a gondolkodást irányító vagy a megoldás ellenőrzését szolgáló eszközként funkcionál. Amennyiben lehetséges, úgy az egyenletek és egyenlőtlenségek technológiai eszközök nélküli megoldása bővebb kontextusban kapjon értelmet.</p>
A diák modellezi a valós jelenségeket hatványfüggvényekkel.	A diák leír egy jelenséget hatványfüggvénnyel. Összehasonlít különböző modelleket (lineáris függvény, hatványfüggvények), valamint kritikus módon választja ki és alkalmazza a modellt.	A diákok szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett olyan valós jelenségeket elemeznek, amelyeket viszonylag célszerű hatványfüggvényekkel modellezni. Modellkeresés és -készítés során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.

3.4. Másodfokú függvény és másodfokú egyenlet

A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:

A diák ismeri a másodfokú függvény hozzárendelési szabályának különböző alakjait és a tulajdonságait. Ki tudja számolni a zérushelyeket és a csúcspontot. A grafikont pontonként vagy a technológiai eszközök alkalmazásával képes ábrázolni.

A diák megoldja a másodfokú egyenletet következtetéssel, táblázattal (próbálkozással) vagy grafikus módszerrel, illetve technológiai eszközök felhasználásával. Ellenőrzést végez, elmagyarázza az egyenlet megoldásának folyamatát és a megoldás értelmét.

A diák rendelkezik alapvető tapasztalatokkal szakmai területéről vagy a mindennapi életből vett jelenségek másodfokú függvénnyel való modellezéséről.

A modellválasztáshoz és annak alkalmazásához kritikusan viszonyul.

Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák feleleveníti a másodfokú függvényről, az egyenletek különböző alakjairól és a másodfokú függvény grafikonjáról tanultakat.		A már ismert tartalmakat nem kell újra megtanítani, hanem olyan tevékenységeket kell tervezni, amelynek keretei közt a diákok önálló otthoni és/vagy iskolai keretek közt felelevenítik és kiegészítik korábbi ismereteiket. A tanár felismeri a hibásan elsajátított tartalmakat és hiányosságokat, segíti a diákokat azok kijavításában.
A diák felismeri a másodfokú függvényt.	A diák a másodfokú függvényt a hatványfüggvény speciális eseteként fogja fel. Megkülönbözteti a négyzetes összefüggést a többi fajtától.	A diákok az $f(x) = a(x - p)^2 + q$ alakú hatványfüggvény és grafikonja kapcsán új fogalmakat ismernek meg: másodfokú függvény, parabola, csúcspont.
A diák alkalmazza a másodfokú függvény tulajdonságait.	Alkalmazza az új fogalmakat: csúcspont, parabola, az egyenlet csúcsponti és általános alakja, az egyenlet gyöktényezős alakja. Alkalmazza mindhárom alakját a másodfokú függvény egyenletének, és értelemszerűen átváltja az egyiket a másikba. Ismeri és alkalmazza a zérushelyek tulajdonságait.	
A diák ábrázolja a másodfokú függvény grafikonját.	A diák a másodfokú függvény egyenletéből más megfelelő alakba váltással meghatározza a csúcspontot és a függvény zérushelyeit, valamint ábrázolja annak grafikonját.	A diákok a komplexebb másodfokú függvények grafikonjainak ábrázolásához grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak, de csak addig, amíg meg nem tanulják a zérushelyek kiszámításának módját.

<p>A diák felismeri és megoldja a másodfokú egyenletet, illetve egyenlőtlenséget.</p>	<p>A diák analitikus módon és a technológia segítségével megoldja a másodfokú egyenletet vagy egyenlőtlenséget. Érti az algebrai és grafikus módszerrel kapott megoldásokat, ellenőrzést végez, valamint elmagyarázza a megoldási folyamatot és a megoldás értelmét. Érti és alkalmazza a másodfokú egyenlet megoldásait mint a másodfokú függvény zérushelyeit.</p>	<p>A diákok az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldása során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak abban az esetben,</p> <ul style="list-style-type: none"> • amikor az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldási eljárásait tanulják technológiai eszközök segítségével, • amikor a tevékenység célja az egyenlet, illetve egyenlőtlenség értelmének és megoldásának jobb megértése, • amikor a diákok olyan egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket oldanak meg, amelyek a mindennapi életből vett problémákból adódnak, és éppen ezért komplexebbek és nehezebbek, • amikor az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldása nem az elsődleges cél, hanem csak egy fázisa egy nagyobb feladatnak vagy projektnek. <p>Ha a tevékenység célja az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldási folyamatának megtanulása, akkor a technológia a gondolkodást irányító vagy a megoldás ellenőrzését szolgáló eszközként funkcionál. Amennyiben lehetséges, úgy az egyenletek és egyenlőtlenségek technológiai eszközök nélküli megoldása bővebb kontextusban kapjon értelmet.</p>
<p>A diák létező problémákat old meg, és modellezi a valós jelenségeket másodfokú függvénnyel.</p>	<p>A diák megold olyan feladatokat, amelyekben a másodfokú függvényt és annak tulajdonságait vagy a másodfokú egyenletet, illetve egyenlőtlenséget alkalmazza. A diák leír egy jelenséget másodfokú függvénnyel. Összehasonlít különböző modelleket (lineáris függvény, hatványfüggvények, másodfokú függvény), valamint kritikus módon választja ki és alkalmazza a modellt.</p>	<p>A diákok olyan a szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett valós jelenségeket elemeznek, amelyeket viszonylag célszerű másodfokú függvénnyel modellezni. Modellkeresés és -készítés során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.</p>

3.5. Polinomok		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák felismeri a polinom egyenletét, és azt megfelelően illeszti a lineáris függvényről, a hatványfüggvényekről és a másodfokú függvényről tanultakhoz.	A diák a polinomot az elemi hatványfüggvények lineáris kombinációjaként értelmezi. Tudja, hogy az eddig tárgyalt függvényfajták (lineáris függvény, hatványfüggvények, másodfokú függvény) a polinomok speciális fajtái.	A polinomok példái a már ismert (lineáris, hatvány és másodfokú) függvények bővítéseként, illetve általánosításaként kerülnek bevezetésre. A polinom algebrai szemléltetését a diákok szakmai területéről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett példákkal kell alátámasztani.
A diák ismeri és alkalmazza a polinomok tulajdonságait.	A diák ismeri a polinomok tulajdonságait, és alkalmazza azokat a grafikonok ábrázolásánál és más feladatoknál: meghatározza a polinom folytonosságát, azokat az intervallumokat, amelyeken a függvény pozitív, illetve negatív, valamint a függvény növekedésének és csökkenésének intervallumait, a függvény lokális szélsőértékeit, valamint azt, melyik intervallumokon konvex, illetve konkáv, továbbá tudja, hogyan viselkedik a változó a tetszőlegesen nagy és tetszőlegesen kicsi értékeinél. A diák felismeri a polinomok tulajdonságait, és ellenőrzi azokat grafikus módszerrel, némelyeket analitikus módon is.	A diákok grafikus számológéppel és számítógépes programmal ábrázolják a polinomok grafikonjait, és megismerik annak tulajdonságait. Ezek után következik csak néhányuk tárgyalása analitikus módon (pl. a zérushelyek tulajdonságai).
A diák ábrázolja a polinom grafikonját.	A diák meghatározza a polinomok zérushelyeit, megvizsgálja annak viselkedését a változó tetszőlegesen nagy és tetszőlegesen kicsi értékeinél, valamint vázolja annak grafikonját, és eközben figyelembe veszi a grafikon viselkedését a zérushelyek környezetében.	A diákok meghatározzák az alacsonyabb fokú polinomok és a gyöktényezős alakban felírható polinomok zérushelyeit tényezőkre bontással és Horner-algoritmussal, a magasabb fokú polinomok zérushelyeit pedig grafikus számológép vagy számítógépes program felhasználásával.
A diák modellezi a valós jelenségeket polinomokkal.	A diák leír egy jelenséget polinommal. Összehasonlítja különböző modelleket (lineáris függvény, hatványfüggvények, másodfokú függvény, magasabb fokú polinomok), valamint kritikus módon választja ki és alkalmazza a modellt.	A diákok olyan a szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett valós jelenségeket elemeznek, amelyeket viszonylag célszerű polinomokkal modellezni. Modellkeresés és -készítés során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.

3.6. Racionális törtfüggvények		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák ismeri a racionális törtfüggvény egyenletét.	A diák a racionális törtfüggvényt a polinomok hányadosaként fogja fel, és felismeri annak egyenletét.	
A diák ismeri és alkalmazza a racionális törtfüggvény tulajdonságait.	A diák ismeri a racionális törtfüggvények tulajdonságait, elsősorban a zérushelyek és pólusok jellemzőit, a racionális törtfüggvény aszimptotáit, továbbá alkalmazza azokat a grafikonok ábrázolásakor és más feladatoknál. A diák elsősorban a grafikus, másrészt az analitikus módszer segítségével felismeri a racionális törtfüggvény tulajdonságait, és felsorolja őket.	A diákok grafikus számológéppel és számítógépes programmal ábrázolják a racionális törtfüggvények grafikonjait, és megismerik annak tulajdonságait. Ezek után következik csak a zérushelyek és pólusok, valamint az aszimptoták tulajdonságainak tárgyalása analitikus módon. Az analitikus módszer a racionális törtfüggvények tulajdonságainak jobb megértését szolgálja, de ennek a tananyagának az elsajátítása nem várható el minden diáktól.
A diák ábrázolja a racionális törtfüggvény grafikonját.	A diák technológiai eszközök segítségével ábrázolja a racionális törtfüggvény grafikonját, és értelmezi azt.	A diákok a grafikonok ábrázolásához grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.
A diák modellezi a valós jelenségeket racionális törtfüggvényekkel.	A diák leír egy jelenséget racionális törtfüggvénnyel. Összehasonlít különböző modelleket (lineáris függvény, hatványfüggvények, másodfokú függvény, magasabb fokú polinom, racionális törtfüggvény), valamint kritikus módon választja ki és alkalmazza a modellt.	A diákok olyan a szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett valós jelenségeket elemeznek, amelyeket viszonylag célszerű racionális törtfüggvénnyel modellezni. Modellkeresés és -készítés során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.

3.7. Exponenciális függvény és exponenciális egyenlet		
A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:		
A diák felismeri és érti az exponenciális növekedés jelenségét szövegben, táblázatban és grafikonon. A diák a szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett jelenségekre egyszerű matematikai modellt készít, és leírja azokat exponenciális függvénnyel. A modellválasztáshoz és annak alkalmazásához kritikusán viszonyul.		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák feleleveníti az exponenciális növekedésről és az annak modellezéséről tanultakat.		A már ismert tartalmakat nem kell újra megtanítani, hanem olyan tevékenységeket kell tervezni, amelynek keretei közt a diákok önálló otthoni és/vagy iskolai keretek közt felelevenítik és kiegészítik korábbi ismereteiket. A tanár felismeri a hibásan elsajátított

		tartalmakat és hiányosságokat, segíti a diákokat azok kijavításában.
A diák megkülönbözteti az exponenciális összefüggést a többi fajta összefüggéstől.	Megkülönbözteti az exponenciális függvényt a hatványfüggvénytől hozzárendelési szabálya, táblázata és grafikonja alapján, továbbá elmagyarázza a különbségeket.	
A diák egyenlettel szemlélteti az exponenciális összefüggést.	A diák az exponenciális összefüggést szimbólumokkal, a következő egyenlettel írja fel: $f(x) = a^x$.	Az összefüggés megadható szöveggel, táblázattal vagy grafikonnal.
A diák ismeri az exponenciális függvény tulajdonságait.	A diák ismeri az exponenciális függvény $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ egyenletét, valamint az a konstans jelentését. Tisztában van a függvény értelmezési tartományával, értékkészletével, a 0 helyen felvett helyettesítési értékével és aszimptotájával. Ismeri az a alap hatását a függvény növekedésére, illetve csökkenésére. Tudja, hogy az exponenciális függvény grafikonja konvex görbe.	A diákok felhasználják előismereteiket, és megvizsgálják az exponenciális függvény tulajdonságait. Ehhez grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.
A diák ábrázolja az exponenciális függvény grafikonját.	A diák ábrázolja az $f(x) = ka^{x-p} + q$, $a > 0$, $a \neq 1$ exponenciális függvény grafikonját. Értelmezi a függvény alapgrafikonjának párhuzamos eltolásaival és nyújtásaival/zsugorításaival létrejövő végleges grafikonját.	A diákok ábrázolják az exponenciális függvény tulajdonságainak figyelembevételével az $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ exponenciális függvény grafikonját. Az $f(x) = ka^{x-p} + q$, $a > 0$, $a \neq 1$ exponenciális függvény grafikonját pedig a technológia eszközeivel is megjeleníthetik.
A diák felismeri és megoldja az exponenciális egyenletet, illetve egyenlőtlenséget.	A diák analitikus és grafikus módszerekkel megoldja az exponenciális egyenletet, illetve egyenlőtlenséget. Érti az algebrai és grafikus módszerrel kapott megoldásokat, ellenőrzést végez, valamint elmagyarázza a megoldási folyamatot és a megoldás értelmét.	A diákok az exponenciális egyenlet, illetve egyenlőtlenség analitikus megoldási folyamatát összekötik a grafikus módszerrel. Az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldásakor grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak akkor, <ul style="list-style-type: none"> • amikor az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldási eljárásait tanulják technológiai eszközök segítségével, • amikor a tevékenység célja az, hogy az egyenlet, illetve egyenlőtlenség értelmét és megoldását jobban megértsék, • amikor a diákok olyan egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket oldanak meg, amelyek a mindennapi életből vett problémákból adódnak, és

		<p>éppen ezért komplexebbek és nehezebbek,</p> <ul style="list-style-type: none"> • amikor az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldása nem az elsődleges cél, hanem az csak egy fázisa egy nagyobb feladatnak vagy projektnek. <p>Ha a tevékenység célja az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldási folyamatának megtanulása, akkor a technológia a gondolkodást irányító vagy a megoldás ellenőrzését szolgáló eszközként funkcionál. Amennyiben lehetséges, úgy az egyenletek és egyenlőtlenségek technológiai eszközök nélküli megoldása bővebb kontextusban kapjon értelmet.</p> <p>Amíg a diákok nem ismerik még a logaritmus fogalmát, addig az exponenciális egyenleteket, illetve az $a^{f(x)} \geq b$ alakú egyenlőtlenségeket csak technológiai eszközök használatával oldják meg.</p>
A diák modellezi a valós jelenségeket exponenciális függvényekkel.	A diák leír egy jelenséget exponenciális függvénnyel. Összehasonlít különböző modelleket (lineáris függvény, hatványfüggvények, polinomok, exponenciális függvény), valamint kritikus módon választja ki és alkalmazza a modellt.	A diákok olyan a szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett valós jelenségeket elemeznek, amelyeket viszonylag célszerű exponenciális függvénnyel modellezni. Modellkeresés és -készítés során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.

3.8. Logaritmus, logaritmusfüggvény és logaritmikus egyenlet

A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:

A diák felismeri és érti a logaritmikus növekedés jelenségét szövegben, táblázatban és grafikonon.

A diák a szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett jelenségekre egyszerű matematikai modellt készít, és leírja őket logaritmusfüggvénnyel. A modellválasztáshoz és annak alkalmazásához kritikusan viszonyul.

Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák feleleveníti a logaritmikus növekedésről és az annak modellezéséről tanultakat.		A már ismert tartalmakat nem kell újra megtanítani, hanem olyan tevékenységeket kell tervezni, amelynek keretei közt a diákok önálló otthoni és/vagy iskolai keretek közt felelevenítik, valamint kiegészítik korábbi ismereteiket. A tanár felismeri a hibásan elsajátított tartalmakat és hiányosságokat, segíti a diákokat azok kijavításában.

A diák egyenlettel szemlélteti a logaritmikus összefüggést.	A diák a mennyiségek logaritmikus összefüggését szimbólumokkal, a következő egyenlettel írja le: $y = \log_a x$.	Az összefüggés megadható szöveggel, táblázattal vagy grafikonnal.
A diák ismeri a logaritmusfüggvény tulajdonságait.	A diák ismeri az $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ logaritmusfüggvény egyenletét, az a konstans jelentését és hatását a függvény növekedésére, illetve csökkenésére. Ismeri a függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, zérushelyét és aszimptotáját. Tudja, hogy a logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze.	A diákok alkalmazzák az exponenciális függvényről szerzett előismereteiket, és kutatják a logaritmusfüggvény tulajdonságait. Ehhez grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.
A diák ábrázolja a logaritmusfüggvény grafikonját.	A diák ábrázolja az $f(x) = k \log_a(x - p) + q$ logaritmusfüggvény grafikonját. Értelmezi a függvény alapgrafikonjának párhuzamos eltolásaival és nyújtásaival/zsugorításaival létrejövő végleges grafikonját.	A diákok a logaritmusfüggvény tulajdonságainak felhasználásával ábrázolják az $f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ logaritmusfüggvény grafikonját. Az $f(x) = k \log_a(x - p) + q$ logaritmusfüggvény grafikonját a diákok technológiai eszközök használatával is megjeleníthetik.
A diák ismeri és alkalmazza a logaritmus definícióját.	A diák ismeri a logaritmus definícióját, és tisztában van a tulajdonságaival. Alkalmazza a logaritmus definícióját az $a^x = b$ exponenciális egyenlet megoldására abban az esetben, amikor azt nem lehet következtetéssel megoldani. Felhasználja a logaritmus azonosságait a logaritmusokat tartalmazó kifejezések egyszerűbb alakra történő átalakításához.	A diákok fejben kiszámítanak bizonyos logaritmusokat, pl. $\log 2$, $\ln e^2$, ..., a továbbiak kiszámolásához numerikus számológépet használnak.
A diák kifejezi az adott alapú logaritmust egy tetszőleges alapú logaritmussal.	A diák ismeri és alkalmazza az új alapra áttérés képletét.	
A diák felismeri és megoldja a logaritmikus egyenletet és a logaritmikus egyenlőtlenséget.	A diák analitikus és grafikus módszerrel megold egyszerű logaritmikus egyenletet, illetve egyenlőtlenséget. Érti az algebrai és grafikus módszerrel kapott megoldásokat, ellenőrzést végez, valamint elmagyarázza a megoldási folyamatot és a megoldás értelmét.	A diákok a logaritmikus egyenlet, illetve egyenlőtlenség analitikus megoldási folyamatát a grafikus módszerrel kötik össze. Az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldása során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak abban az esetben, <ul style="list-style-type: none"> • amikor az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldási eljárásait tanulják technológiai eszközök segítségével, • amikor a tevékenység célja az, hogy az egyenlet, illetve egyenlőtlenség értelmét és megoldását jobban megértsék,

		<ul style="list-style-type: none"> • amikor a diákok olyan egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket oldanak meg, amelyek a mindennapi életből vett problémákból adódnak, és éppen ezért komplexebbek és nehezebbek, • amikor az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldása nem az elsődleges cél, hanem csak egy fázisa egy nagyobb feladatnak vagy projektnek. <p>Ha a tevékenység célja az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldási folyamatának megtanulása, akkor a technológia a gondolkodást irányító vagy a megoldás ellenőrzését szolgáló eszközként funkcionál. Amennyiben lehetséges, az egyenletek és egyenlőtlenségek technológiai eszközök nélküli megoldása bővebb kontextusban kapjon értelmet.</p>
A diák modellezi a valós jelenségeket logaritmusfüggvénnyel.	A diák leír egy jelenséget logaritmusfüggvénnyel. Összehasonlít különböző modelleket (lineáris függvény, hatványfüggvények, exponenciális függvény, logaritmusfüggvény), valamint kritikus módon választja ki és alkalmazza a modellt.	A diákok olyan a szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett valós jelenségeket elemeznek, amelyeket viszonylag célszerű a logaritmusfüggvénnyel modellezni. Modellkeresés és -készítés során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak.

3.9. Szögfüggvények (kiegészítés)		
A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:		
A diák meghatározza tetszőleges szög szögfüggvényének értékét numerikus számológép segítségével. Tetszőleges szög szögfüggvényének értékét ábrázolja egységkörön.		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák feleleveníti a szögfüggvényekről tanultakat.		A már ismert tartalmakat nem kell újra megtanítani, hanem olyan tevékenységeket kell tervezni, amelyek keretei közt a diákok önálló otthoni és/vagy iskolai keretek közt felelevenítik és kiegészítik korábbi ismereteiket. A tanár felismeri a hibásan elsajátított tartalmakat és hiányosságokat, segíti a diákokat azok kijavításában.

A diák ismeri és alkalmazza a tetszőleges szög szögfüggvényének definícióját.	A diák ismeri és alkalmazza a szögfüggvények definícióját az egységkörben, és annak segítségével meghatározza a tetszőleges szögfokban vagy radiánban megadott szög szögfüggvényének értékét.	A diákok segítséggel berajzolják egyes tetszőleges szögek szögfüggvényeinek értékét az egységkörbe, és fordítva. Ha adott az egyik függvény értéke, akkor meghatározzák a szöget és a többi függvény értékét. Numerikus számológépet és „trigonirt” használnak.
A diák ismeri és alkalmazza az ugyanazon szög szögfüggvényeinek alapvető összefüggéseit.	A diák alkalmazza a szögfüggvények alapvető összefüggéseit, és adott szögfüggvénnyel kifejezi a többi szögfüggvényt.	A diákok a saját szakterületük által megkövetelt mélységben egyszerűbb alakra hoznak kifejezéseket, illetve egyszerű azonosságokat bizonyítanak be a periodicitás, a függvény páros, illetve páratlan voltáról, valamint az addíciós tételekkel.
A diák ismeri és alkalmazza a szögfüggvények periodicitását, valamint a páros, illetve páratlan függvény fogalmát.	A diák a periodicitással, valamint a függvény páros, illetve páratlan voltának segítségével kifejezi tetszőleges szög szögfüggvényét a hegyesszög szögfüggvényeként.	
A diák ismeri és alkalmazza az addíciós tételeket.	A diák ismeri és alkalmazza az addíciós tételeket hegyesszögre való áttérésnél, kétszeres szögeknél és más azonosságok bizonyítása során.	
A diák ismeri szögfüggvények tulajdonságait.	A diák ismeri a szögfüggvények egyenleteit: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$, valamint az értelmezési tartományait és értékkészleteiket. Felírja a zérushelyeket, meghatározza a szögfüggvény növekedésének és csökkenésének intervallumait, megadja a szinusz- és koszinuszfüggvény maximumát és minimumát, valamint a tangens és kotangens függvény aszimptotáit.	A diákok először technológiai eszközök nélkül, pontonként ábrázolják az alapvető szögfüggvények grafikonját. Majd előismereteiket felhasználva, grafikus számológéppel vagy számítógépes programmal ábrázolják a tetszőleges szögfüggvény grafikonját, és kutatják annak tulajdonságait. Ezek után kerül csak sor a szögfüggvények tulajdonságainak analitikus módon történő tárgyalására.
A diák ábrázolja a szögfüggvény grafikonját.	A diák ábrázolja az $f(x) = A \sin(\omega(x - \varphi)) + y_0$, $f(x) = A \cos(\omega(x - \varphi)) + y_0$, $f(x) = \tan x$ és $f(x) = \cot x$ szögfüggvények grafikonját. Értelmezi a függvény alapgrafikonjának párhuzamos eltolásaival és nyújtásaival/zsugorításaival létrejövő végleges grafikonját.	A diákok ábrázolják az $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$ szögfüggvények grafikonját a függvények tulajdonságainak felhasználásával. Az $f(x) = A \sin(\omega(x - \varphi)) + y_0$ és az $f(x) = A \cos(\omega(x - \varphi)) + y_0$ függvények grafikonját a diákok technológia eszközökkel is ábrázolhatják.
A diák modellezi a valós jelenségeket szögfüggvényekkel.	A diák leír egy jelenséget szögfüggvénnyel. Összehasonlít különböző modelleket (lineáris függvény, hatványfüggvények, exponenciális függvény, polinomok, racionális törtfüggvény, logaritmusfüggvény, szögfüggvény), valamint kritikus	A diákok olyan a szakmai területükről, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből vett valós jelenségeket elemeznek, amelyeket viszonylag célszerű szögfüggvényekkel modellezni. Modellkeresés és -készítés során grafikus számológépet

	módon választja ki és alkalmazza a modellt.	és számítógépes programokat használnak.
--	---	---

3.10. Ciklometrikus függvények és a trigonometrikus egyenletek (választható témakör)		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák ismeri és alkalmazza a ciklometrikus függvényeket.	A diák ismeri az $f(x) = \arcsin x, f(x) = \arccos x,$ $f(x) = \arctan x, f(x) = \operatorname{arccot} x$ ciklometrikus függvények értelmezési tartományát és értékkészletét. Alkalmazza a ciklometrikus függvényeket a szögek szögfokban és radiánban történő kiszámításához.	A diákok ábrát készítenek az egyes ciklometrikus függvények grafikonjairól, és leírják annak tulajdonságait. A szögek meghatározásához számológépet használnak.
A diák ábrázolja a ciklometrikus függvény grafikonját.	A diák ábrázolja a ciklometrikus függvény grafikonját a szögfüggvény inverzeként. Elmagyarázza a ciklometrikus függvény képét az inverz függvényekről megtanult ismeretei alapján.	A diákok azzal a céllal jelenítik meg technológiai eszközök nélkül a ciklometrikus függvény grafikonjának néhány példáját, hogy jobban megértsék az inverz függvény fogalmát. A ciklometrikus függvények grafikonjainak további ábrázolásait grafikus számológéppel és számítógépes programokkal végzik el.
A diák felismeri és megoldja a trigonometrikus egyenletet, illetve egyenlőtlenséget.	A diák analitikus és grafikus módszerrel megold egyszerű trigonometrikus egyenletet, illetve egyenlőtlenséget. Érti az algebrai és grafikus módszerrel kapott megoldásokat, ellenőrzést végez, valamint elmagyarázza a megoldási folyamatot és a megoldás értelmét.	A diákok megoldják a trigonometrikus egyenletet, pl. $\sin(\omega x + \rho) = a, -1 \leq a \leq 1, \tan 2x = a,$ $\sin x = \cos x, \cos^2 x = 1 + \sin x, \dots$ Az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldása során grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak abban az esetben, <ul style="list-style-type: none"> • amikor az egyenletek, illetve egyenlőtlenségek megoldási eljárásait tanulják technológiai eszközök segítségével, • amikor a tevékenység célja az, hogy az egyenlet, illetve egyenlőtlenség értelmét és megoldását jobban megértsék, • amikor a diákok olyan egyenleteket, illetve egyenlőtlenségeket oldanak meg, amelyek a mindennapi életből vett problémákból adódnak, és

		<p>éppen ezért komplexebbek és nehezebbek,</p> <ul style="list-style-type: none"> • amikor az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldása nem az elsődleges cél, hanem csak egy fázisa egy nagyobb feladatnak vagy projektnek. <p>Ha a tevékenység célja az egyenlet, illetve egyenlőtlenség megoldási folyamatának megtanulása, akkor a technológia a gondolkodást irányító vagy a megoldás ellenőrzését szolgáló eszközként funkcionál. Amennyiben lehetséges, úgy az egyenletek és egyenlőtlenségek technológiai eszközök nélküli megoldása bővebb kontextusban kapjon értelmet.</p>
--	--	---

3.11. Differenciálszámítás		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák átismétli a függvények folytonosságáról tanultakat.	A diák ábrázolja a függvény grafikonját. Meghatározza a szakadási pontokat. Megállapítja, hogy az adott pontokban a függvény folytonos-e.	A folytonosság leíró módszerrel kerül definiálásra. A diákok átismétlik a tudásukat azokról a függvényekről, amelyekkel már találkoztak tanulmányaik során, és ezeknek meghatározzák a folytonosságát az adott pontokban. A diákok a függvények tulajdonságainak ismerete alapján, valamint grafikus számológép és számítógépes programok segítségével ábrázolják annak grafikonját.
A diák ismeri a függvény határértékének definícióját.	A diák megtanulja a következő fogalmakat: a pont környezete és a függvény határértéke egy pontban. Elsajátítja a függvény határértékének definícióit, és ezek kapcsán kijelölt feladatokat old meg.	A diákok átismétlik a nyílt intervallum fogalmát (a számegyenes egy metszete), és azt összekapcsolják a pont környezetének definíciójával. A függvény grafikonjának segítségével meghatározzák a határértéket. Ehhez grafikus számológépet vagy számítógépes programokat használnak.
A diák meghatározza a függvény határértékét.	A diák kiszámítja a függvények egyszerű határértékeit. Alkalmazza a határértékszámítás azonosságait.	A diákok átismétlik a kifejezések tényezőkre bontását, és azt a határértékek meghatározásánál felhasználják.
A diák meghatározza az egyenes hajlásszögét és a két egyenes által közbezárt szöget.	A diák ismeri és alkalmazza az egyenes hajlásszögének és iránytényezőjének összefüggését. Meghatározza az egyenes hajlásszögének és a két egyenes által közbezárt szögének a nagyságát.	A diákok grafikus számológép vagy számítógépes program használatával megvizsgálják az egyenes hajlásszögének és iránytényezőjének összefüggését.

<p>A diák ismeri a függvény egy pontban vett deriváltjának definícióját, valamint érti és alkalmazza a derivált fogalmának geometriai jelentését.</p>	<p>A diák felírja a differenciálhányadost és a függvény deriváltjának definícióját. Érti és alkalmazza az összefüggést a függvény deriváltja, a függvény (ill. grafikonja érintőjének) hajlásszöge, valamint a függvény adott pont környezetében vett növekedése között. Meghatározza a függvény deriváltjának adott pontban vett megközelítő számértékét. A diák meghatározza egy adott pontban a görbe grafikonjának érintőjét és a két görbe által közbezárt szöget.</p>	<p>A diákok grafikus számológép vagy számítógépes programok használatával kutatják az összefüggést a függvény deriváltja, az érintő hajlásszöge, valamint a függvény adott pont környezetében vett növekedése között. Az érintők egyenletét és a görbék által közbezárt szöget elsősorban azzal a céllal határozzák meg, hogy jobban megértsék az összefüggést a derivált, az érintő hajlásszöge és a függvény egy pontban vett növekedése között.</p>
<p>A diák deriválja a függvényeket.</p>	<p>A diák elsajátítja a függvény deriváltjának fogalmát. Alkalmazza az alapfüggvények és az összetett függvények deriválási szabályait. Megismeri és alkalmazza az elemi függvények deriváltjait.</p>	<p>A diákok tanári segítséggel levezetnek bizonyos deriválási szabályokat és néhány elemi függvény deriváltját. A tanár magyarázata vagy a szakirodalom alapján belátják a további szabályokat és az elemi függvények deriváltjait. A függvények deriváltjainak meghatározásánál annak megértésén van a hangsúly. A diákok csak olyan mértékben fejlesztik jártasságukat ebben a témakörben, hogy folytathassák tanulmányaik során a függvények további analizisének tárgyalását. A derivált meghatározásához grafikus számológépet vagy számítógépes programokat is használhatnak.</p>
<p>A diák felhasználja az összefüggést a derivált és a függvény lokális viselkedése között.</p>	<p>A diák ismeri az összefüggést a függvény első deriváltja és a stacionárius pontok, valamint a függvény növekedése, illetve csökkenése között. Ezt alkalmazza a stacionárius pontok, a növekedés és csökkenés intervallumainak meghatározására, valamint egyszerű szélsőérték-feladatok megoldásakor.</p>	<p>A diákok létező szélsőérték problémákat oldanak meg szakterületükből, más tantárgyakból vagy a mindennapi életből származó példák alapján. Ehhez grafikus számológépet és számítógépes programokat használnak. A valós példák megoldása közben a diákok betekintést kapnak a derivált jelentőségéről a különböző szakterületeken, miközben a tanár hangsúlyozza annak fontosságát.</p>
<p>A diák ábrázolja a függvény grafikonját.</p>	<p>A diák vizsgálja a függvény tulajdonságait. Meghatározza a függvény értelmezési tartományát, értékkészletét, növekedésének és csökkenésének intervallumait, lokális szélsőértékeit és vízszintes inflexiós pontjait. Ábrázolja a függvény grafikonját, és</p>	<p>A diákok a függvények tulajdonságainak megismeréséhez és a grafikonok ábrázolásához grafikus számológépet és számítógépes programokat is használhatnak.</p>

	értelmezi azt.	
--	----------------	--

3.12. Sorozatok		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák ismeri a sorozat definícióját és annak tulajdonságait.	A diák a sorozatot olyan függvényként fogja fel, amely a természetes számok (rész)halmazát egy másik halmazra képezi le. Meghatározza a sorozat tulajdonságait, és ismeri a sorozatok különböző szemléltetési módjait (általános tag, rekurziós képlet, a tagok felsorolása, grafikon). Megkülönbözteti a valós függvények grafikonját (görbék) a sorozatok grafikonjától (pontdiagram).	A tanár különböző szakterületekről, a mindennapi életből és a környezetből keres példákat, valamint olyan tevékenységeket készít elő, amelyekkel a diákok a sorozatokat különféle jelenségek analízisének fontos eszközeként ismerik meg. A diákok a sorozatot a matematikai minták specifikus példajaként fogják fel. Az önálló vizsgálatok és analízisek során különféle technológiai eszközöket használnak.
A diák ismeri és alkalmazza a számtani sorozat definícióját.	A diák definiálja a számtani sorozatot, felírja az általános tagját, meghatározza a megadott sorozat elemeit. Kiszámítja a számtani sorozat n tagjának összegét.	A sorozat definíciója és az n tag összege a történelemből, a szakmai tárgyakból vagy hasonló területekről vett példák alapján kerül bevezetésre.
A diák ismeri és alkalmazza a mértani sorozat definícióját.	A diák érti a mértani sorozat definícióját és a tulajdonságait, valamint kiszámít különféle mennyiségeket (általános tag, hányados, összeg). Belátja a mértani sorozat jelentőségét és hasznát a különböző jelenségek modellezésénél (pl. a természetben az exponenciális növekedésnél, a pénzügyi matematikában a kamatoskamat-számításnál).	A diákok az analízisnél és önálló vizsgálatoknál technológiai eszközöket és különböző számítógépes programokat használnak, többek között olyanokat, amelyeket saját szakterületükről ismernek.

4. téma: A LOGIKA ALAPJAI, AZ ADATFELDOLGOZÁS ÉS A VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ALAPJAI

4.1. A logika alapjai		
Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák ismeri a kijelentés fogalmát és a kijelentések közötti összefüggéseket.	A diák felismeri és érti a kijelentés fogalmát, valamint alkalmazza a kijelentések közt fennálló következő összefüggéseket: konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalencia.	A tanár azoknál a tartalmaknál, amelyekben egyszerűbb bizonyítások vannak (pl. a geometriában, a számoknál (oszthatóság)) különös hangsúlyt fektet a matematikai nyelvezetre, a kijelentésekre és a kijelentések közt fennálló összefüggésekre.
A diák következtet, indokol és bizonyít.	A diák megkülönbözteti a példa demonstrációját a bizonyítástól. Érti az utat, illetve azt az átmenetet, amely a rövid matematikai magyarázattól a bizonyításig terjed. Tisztában van vele, hogy amennyiben a feltételek megváltoznak, az hatással van a feladat megoldására. Gondolatmenetében helyesen alkalmazza a „ha..., akkor” szerkezetet, és tud válaszolni a következő kérdésekre: „Miért...?” és „Mi történik, ha...?” Alkalmazza a matematikai következtetést (dedukcióval) a kijelentések indoklásánál. Lépésekre bontja a (pl. geometriai) probléma megoldását, és deduktívan megindokolja az egyes lépéseket. Tisztában van azzal, hogy léteznek olyan feltételek, illetve megkötések, amelyeknél fennáll egy adott következmény, és ezeket fel tudja sorolni. Érti a szükséges és elégséges feltétel fogalmát.	A diákok egyszerűbb matematikai állításokat szóban és írásban indokolnak, továbbá bizonyítanak (nem csak a reprodukcióját adják a bizonyításoknak).

4.2. Az adatfeldolgozás		
A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:		
A diák ismeri az adatfeldolgozás alapvető módszereit: adatgyűjtés, az adatok táblázatba foglalása, az adatok elemzése egyszerű struktúrákkal (egy vagy két kritérium alapján csoportokba, illetve kategóriákba sorolás, az osztályozás és a fadiagram használata), valamint tisztában van az adatok ábrázolásának kérdéseivel különféle diagramokon, továbbá érti az adatok összefoglalásának módszereit (módusz, medián, számtani közép). Az adatfeldolgozásról tanultakat képes tapasztalati kutatás során a vizsgálat teljes ívében, az adatgyűjtéstől az eredmények értelmezéséig felhasználni.		

Operatív célok	A célok leírása	Példák tanórai tevékenységekre és útmutatók
A diák átismétli tudását az adatfeldolgozásról.		Az adatfeldolgozás kapcsán elsajátított ismeretek komplex feladatokkal, matematikai kutatásokkal, valamint tantárgyközi projektekkel (tapasztalati kutatásokon keresztül) kerülnek átismétlésre és begyakorlásra.

4.3. A valószínűségszámítás alapjai

A középfokú szakmai képzés kapcsolódó céljai:

A diák ismeri az adatfeldolgozás alapjait.

A diák alkalmazza a kombinatorika alapvető módszereit.	<p>A diák szisztematikusan be tudja mutatni egy adott objektumhalmaz különböző típusait. Ehhez táblázatokat és fadiagramot használ.</p> <p>Ismeri és tudja alkalmazni a szorzatszabályt.</p> <p>A szorzatszabály bemutatásánál fadiagramot vagy egyéb diagramokat készít segítségül.</p> <p>A különféle szövegkörnyezetekben végzett kiválasztásoknál egyből felismeri a permutációkat (ahol minden elemet megkülönböztetünk) és (az ismétlés nélküli) kombinációkat. A kombinációk, illetve permutációk számát képlettel számítja ki.</p> <p>Különféle számításokban felhasználja a szorzatszabályt, és szükség esetén az „összegszabályt” is (pl. ismétlés nélküli vagy ismétléses variációknál).</p>	
---	---	--

<p>A diák meghatározza véletlen események valószínűségét.</p>	<p>A diák ismeri a kísérlet fogalmát. Érti a tapasztalati valószínűség fogalmát, tudja, hogyan kell mérni, és a méréseket helyesen értelmezi.</p> <p>Érti a matematikai valószínűség fogalmát, egyszerű példákban közvetlenül ki tudja azt számítani, és képes az eredményt helyesen értelmezni.</p> <p>Az elemi események rendszerét bemutatja diagramon. Diagram segítségével kiszámítja az összetett események valószínűségét.</p> <p>Érti az egymást kizáró és független események fogalmát, valamint ki tudja számítani az egymást kizáró események összegének, valamint a független események szorzatának valószínűségét.</p> <p>A matematikai valószínűség kiszámításánál alkalmazza a kombinatorikánál megszerzett tudását.</p>	
--	---	--

V. MINIMÁLIS KÖVETELMÉNYEK

A minimális követelményeknek az a diák tesz eleget, akinek kompetenciái alapszintűek, valamint az elsajátított tudását kevésbé önállóan és megbízhatóan tudja bizonyítani.

VI. MÓDSZERTANI ÚTMUTATÓK

A matematika tanításához a módszertani útmutatók a III. fejezetben (Irányadó célkitűzések, Kulcskompetenciák, Útmutatók a kulcskompetenciák fejlesztéséhez című részekben) szerepelnek, konkrétabb javaslatok formájában pedig a IV. fejezet táblázatainak utolsó oszlopában (Operatív célok) olvashatók.

VII. AZ ELLENŐRZÉS ÉS ÉRTÉKELÉS MÓDJAI

A matematikai tudás ellenőrzésének és értékelésének tükröznie kell a matematikaórák globális céljait, a tanítási módszerek sokféleségét, valamint a diákok különböző megnyilvánulási formáit. Ennek során figyelni kell arra, hogy a diákok megértsék a matematikai ötleteket, képesek legyenek azokat kifejezni, az egyszerű, összetett és szakmai matematikai műveleteket csoportosan vagy önállóan végrehajtani. Az alábbi táblázatban az értékelés tervezett formái olvashatók.

Az értékelés módja	Az értékelés kritériumai	Megjegyzés
Írásbeli felmérések	<p>Megéri az alapvető matematikai fogalmakat, és képes azok alkalmazására.</p> <p>Képes szisztematikusan, általánosan és absztraktan gondolkodni a matematikai kérdések tárgyalása során.</p> <p>A matematikai problémák megoldásának a képessége.</p> <p>Az adatok gyűjtésének, rendezésének és elemzésének a képessége.</p> <p>Képes értelmezni és kritikával értékelni a matematikának a saját szakterületén történő alkalmazását.</p> <p>A matematikai eszközök alkalmazásának képessége a kommunikációban.</p>	
Szóbeli feleltetés	<p>Megéri az alapvető matematikai fogalmakat, és képes azok alkalmazására.</p> <p>A matematikai eszközök alkalmazásának a képessége a</p>	<p>Igyekeznünk kell fejleszteni a diákok azon képességét, amely lehető teszi számukra a matematikával kapcsolatos ötleteik minél jobb kifejezését. Amennyiben egy diáknak jelentős nehézségei vannak a szóbeli</p>

	kommunikációban.	kommunikációval, úgy meg kell engedni, hogy a számára legmegfelelőbb módon szerezzon osztályzatot.
Matematikai kutatómunka	<p>Képesség a matematikai eszközök alkalmazására a kommunikációban.</p> <p>Képesség a munkafolyamatok megtervezésére és megszervezésére.</p> <p>Képesség a technológiai eszközök alkalmazására a matematikai műveletek végrehajtása során.</p> <p>Képes szisztematikusan, általánosan és absztraktn gondolkodni a matematikai kérdések tárgyalása során.</p>	<p>A kutatómunka témáját a diákok szakterületéhez kell kötni. A kutatómunka összetettségét a diák képességeihez kell igazítani. A diák akkor kap jó osztályzatot, ha matematikai tudásának és képességeinek megfelelően, lelkesen és felelősségteljesen végzi a munkáját, és mindeközben megmutatja a tervezési képességét, a jól elsajátított matematikai ismeretek alkalmazását, valamint a kommunikáció és technológia használata kapcsán a képességeit.</p>
Projektmunka	<p>Képesség a matematikai eszközök alkalmazására a kommunikációban.</p> <p>Képesség a technológiai eszközök alkalmazására a matematikai műveletek végrehajtása során.</p> <p>Képes értelmezni és kritikával értékelni a matematikának a saját szakterületén történő alkalmazását.</p> <p>Képesség a munkafolyamatok megtervezésére és megszervezésére.</p> <p>Képesség az együttműködésre és a csapatmunkára.</p>	<p>A projektmunkának interdiszciplinárisnak kell lennie, továbbá lényeges, hogy a diákok csapatban dolgozzanak. A feladat értékelésénél figyelembe kell venni, hogy a diák a feladat elvégzésekor mennyire elkötelezett, és milyen mértékben vállal munkájáért felelősséget, képes-e tervezni és dolgozni az adatokkal, valamint tudja-e értelmezni az eredményeket, továbbá kommunikálni, és használja-e a technológiai eszközöket.</p>