

Programma per l'esame di maturità professionale

Matematica

■ POKLICNA MATURA

Il presente catalogo entra in uso nella sessione primaverile dell'anno **2011** e rimane valido fino alla sua sostituzione. Il catalogo in vigore nell'anno in cui il candidato deve sostenere l'esame di maturità riporta in calce l'anno in oggetto.

Ljubljana 2009



ric

Državni izpitni center

SOMMARIO

1. Introduzione	5
2. Obiettivi dell'esame	6
3. Struttura e valutazione	7
3.1 Rappresentazione schematica dell'esame	7
3.2 Tipi di quesiti e loro valutazione	8
4. Contenuti dell'esame	9
5. Adattamenti per candidati diversamente abili	15
6. Allegati	16
6.1 Simboli matematici	16
6.2 Formule allegate al fascicolo d'esame	19
6.3 Esempi tipici di quesiti d'esame	21
6.4 Indicazioni per la valutazione della prova scritta	37
6.5 Esame orale	39
7. Bibliografia e materiali consigliati	41

1. INTRODUZIONE

Il presente catalogo è destinato ai candidati che sceglieranno la matematica quale terza materia da affrontare all'esame di maturità professionale. Esso rappresenta pure un valido aiuto per i docenti che prepareranno gli alunni all'esame in oggetto.

Nel presente documento si fa riferimento al catalogo del sapere per le scuole tecniche o per l'istruzione tecnico professionale (che nell'anno 1998 prevedeva 385 ore di lezione di matematica) e al catalogo di matematica per i programmi delle scuole tecniche dell'anno 2007 (che comprendono un fondo ore variabile da un minimo di 383 a un massimo di 408 ore), nonché ai diversi programmi per l'istruzione professionale e tecnica del 2007, che prevedono dalle 206 alle 242 ore di matematica. Il catalogo fa inoltre riferimento al Regolamento sulla maturità negli istituti tecnici e alla Legge sull'esame di maturità (Zmat-UPB1, Boll. Uff. della RS, n. 1/07).

L'esame di matematica comprende una parte scritta ed una parte orale.

Nel catalogo sono descritti gli obiettivi da verificare, la struttura dell'esame, i punteggi da assegnare e la relativa valutazione. Gli argomenti oggetto di verifica sono sistemati in due colonne: nella prima sono elencati i contenuti ed i concetti, nella seconda sono scritti gli obiettivi che vengono sottoposti a verifica.

Nel catalogo si trovano un elenco di simboli e uno di formule matematiche, che i candidati possono utilizzare durante la prova scritta. Inoltre, vengono proposti alcuni esempi di quesiti con le relative soluzioni e punteggi, e con l'indicazione dei criteri per la loro valutazione.

Infine, sono descritte le modalità di svolgimento dell'esame per i candidati diversamente abili.

Le differenze che l'esame di maturità di matematica per l'anno 2011 presenta per i candidati che hanno assolto programmi in vigore fino all'anno 2004 incluso vengono espressamente indicate.

2. OBIETTIVI DELL'ESAME

L'esame verifica in quale misura il candidato è in grado di:

- leggere un testo e tradurlo in espressione matematica,
- comprendere informazioni espresse con strumenti matematici e usarle nella ricerca di soluzioni adeguate,
- usare la terminologia ed i simboli matematici,
- scrivere e risolvere quesiti matematici in modo sistematico, esatto, autonomo e ordinato,
- usare la matematica come linguaggio di comunicazione,
- usare la matematica come mezzo di comunicazione,
- comprendere e usare i concetti matematici fondamentali e le relazioni che tra essi intercorrono,
- risolvere problemi matematici,
- applicare con senso critico metodi risolutivi, argomentare e motivare risultati,
- applicare la matematica in ambiti professionali e in altri ambiti,
- saper usare gli strumenti consentiti.

3. STRUTTURA E VALUTAZIONE

3.1 RAPPRESENTAZIONE SCHEMATICA DELL'ESAME

L'esame di matematica comprende una parte scritta ed una orale. La parte scritta è unica per tutti i candidati a livello nazionale e si svolge in tutta la Slovenia nelle medesime date. La valutazione è interna e viene effettuata in ogni scuola dagli insegnanti della disciplina.

■ Parte scritta

La prova scritta viene predisposta dalla commissione repubblicana di maturità per la matematica negli Istituti Tecnici, che prepara pure il relativo punteggi e le indicazioni per la valutazione.

Fascicolo d'esame	Tempo a disposizione	Numero punti	Apporto al voto
1	120 minuti	70	70 %
Parte I		(40)	(40 %)
Parte II		(30)	(30 %)

Gli strumenti e i materiali consentiti durante la prova scritta sono: penna stilografica oppure penna a sfera, matita, gomma, calcolatrice tascabile non programmabile, compasso, squadra, righello e rapportatore.

Il fascicolo d'esame comprende anche due pagine di formule che il candidato può consultare per risolvere i quesiti.

Per le costruzioni geometriche è necessario utilizzare gli strumenti in uso per la geometria. Nella risoluzione degli esercizi, i candidati devono presentare in modo chiaro e corretto il procedimento adottato, i calcoli intermedi e le deduzioni che conducono al risultato.

■ Parte orale dell'esame

La lista delle domande e le schede per la parte orale dell'esame vengono preparate in ogni scuola dagli insegnanti della disciplina e fanno riferimento al presente catalogo. Nella lista sono riportate separatamente le domande di teoria e gli esercizi che presentano diversi tipi di situazioni problematiche, riferite soprattutto al profilo professionale specifico del candidato e alla vita quotidiana. Ogni scheda per la parte orale dell'esame presenta una situazione problematica attinente al profilo professionale specifico oppure alla vita quotidiana e tre domande di teoria, collegate o riconducibili alla situazione stessa. Le domande devono verificare competenze matematiche differenti ed obiettivi riferiti ad argomenti diversi.

	Tempo a disposizione	Numero punti	Apporto al voto
1 situazione e 3 domande	fino a 20 minuti	30	30 %

Strumenti consentiti durante la prova orale: penna stilografica oppure penna a sfera, matita, gomma, compasso, squadra, righello, goniometro, "trigonir", calcolatrice programmabile oppure computer corredato di software usato dal candidato durante le lezioni di matematica e autorizzato dagli insegnanti della stessa scuola.

Ogni candidato ha diritto a 15 minuti per prepararsi alla prova orale.

3.2 TIPI DI QUESITI E LORO VALUTAZIONE

Esame	Tipi di quesiti	Valutazione dei quesiti
Parte I della prova scritta	9 quesiti brevi	5 quesiti da 4 punti ciascuno e 4 quesiti da 5 punti ciascuno.
Parte II della prova scritta	3 quesiti strutturati: il candidato ne deve scegliere e risolvere due	Per ciascun quesito si possono conseguire fino a 15 punti.
Esame orale	Una situazione problematica riferita al profilo professionale specifico oppure alla vita quotidiana e tre domande di teoria, collegate o riconducibili alla situazione stessa	La situazione problematica completa, comprensiva delle domande, permette di conseguire fino a un massimo di 30 punti, di cui almeno 10 per la situazione problematica, per collegare le domande di teoria alla situazione e per l'uso adeguato degli strumenti tecnologici.

I candidati che abbiano assolto programmi in vigore fino all'anno 2004 incluso, nel 2011 possono sostenere la parte orale dell'esame rispondendo a tre domande della lista, ognuna delle quali comporta fino a 10 punti. L'unico strumento tecnologico consentito è la calcolatrice tascabile non programmabile.

4. CONTENUTI DELL'ESAME

ARGOMENTI

- Insiemi numerici
- Geometria
- Funzioni ed equazioni algebriche
- Funzioni ed equazioni trascendenti
- Successioni e calcolo del montante in regime di capitalizzazione composta
- Elaborazione dati (statistica per i programmi in vigore fino al 2004 incluso)
- Calcolo differenziale (soltanto per i programmi introdotti dopo il 2004)
- Fondamenti di calcolo della probabilità (soltanto per i programmi introdotti dopo il 2004)

■ Insiemi numerici

■ CONTENUTI, CONCETTI

Numeri naturali, interi, razionali e reali.

Proprietà delle operazioni in tutti gli insiemi numerici.

Divisibilità in \mathbb{N} e in \mathbb{Z} .

Potenze con esponenti naturali e interi.

Numeri primi e numeri composti.

Criteri di divisibilità.

Divisori e multipli.

Espressioni.

Proprietà della relazione d'uguaglianza e di disuguaglianza.

Il teorema fondamentale della divisione.

Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo.

Numeri razionali e numeri reali.

Frazioni.

Relazione d'ordine, d'uguaglianza e di disuguaglianza e relative proprietà.

Scrittura decimale dei numeri.

Rapporti, quote, percentuali.

■ OBIETTIVI DA VERIFICARE

- Calcolare con i numeri naturali, interi, razionali e reali applicando le proprietà delle operazioni aritmetiche.
- Trovare multipli e divisori di numeri naturali e di numeri interi.
- Calcolare con le potenze con esponente naturale e intero e usare le proprietà del calcolo con le potenze.
- Conoscere le regole fondamentali per risolvere equazioni e disequazioni.
- Saper risolvere semplici equazioni e disequazioni.
- Calcolare con espressioni algebriche (potenza del binomio, fattorizzare la differenza dei quadrati, la differenza e la somma dei cubi, usare la regola di Viète).
- Conoscere la relazione di divisibilità e la relazione d'ordine.
- Conoscere ed usare il teorema fondamentale della divisione.
- Conoscere i numeri primi ed i numeri composti.
- Scomporre un numero composto in fattori primi.
- Trovare il massimo comune divisore di più numeri.
- Trovare il minimo comune multiplo di più numeri.
- Determinare se un numero è divisibile per 2, 3, 5, 9 e 10.
- Eseguire calcoli con frazioni numeriche e con frazioni algebriche.
- Trasformare una frazione in numero decimale.

L'asse reale.
 Intervalli.
 Numeri irrazionali.
 Scrittura decimale di un numero irrazionale.
 Relazione d'ordine nell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} .
 Radice quadrata e cubica.
 Arrotondamento.
 Valore assoluto di un numero e sue proprietà.
 Potenze con esponenti razionali.

- Trasformare un numero decimale periodico in frazione ridotta.
- Calcolare le percentuali.
- Calcolare la base, la quota e la ragione percentuale.
- Usare le proporzioni.
- Rappresentare i numeri reali come punti e come intervalli sull'asse reale.
- Arrotondare.
- Stimare un risultato.
- Eseguire calcoli con i radicali.
- Estrarre radice parziale e razionalizzare il denominatore.
- Risolvere semplici equazioni e disequazioni contenenti il valore assoluto.
- Eseguire calcoli con potenze con esponente razionale.
- Calcolare con i radicali.

■ Geometria

■ CONTENUTI, CONCETTI

Geometria del piano

Concetti fondamentali della geometria.
 Punti e rette nel piano e relazioni reciproche.
 Distanza, segmento, retta di sostegno di un segmento, asse di simmetria, semiretta, angolo.
 Triangolo, cerchio, poligono.
 Teoremi del triangolo rettangolo.
 Congruenza.
 Similitudine.
 Funzioni goniometriche degli angoli acuti

■ OBIETTIVI DA VERIFICARE

- Disegnare una retta, una semiretta, un segmento, un asse di simmetria, un cerchio, un'arco di circonferenza, una corda, una tangente.
- Distinguere i tipi di triangoli rispetto ai lati ed agli angoli.
- Conoscere i diversi tipi di angoli (consecutivi, adiacenti, acuti, ottusi, supplementari, ...).
- Calcolare con gli angoli.
- Conoscere ed applicare la definizione di congruenza tra i triangoli.
- Applicare i teoremi fondamentali sulla congruenza tra triangoli.
- Conoscere le unità di misura degli angoli e trasformare i gradi in radianti e viceversa.
- Saper usare le proprietà del triangolo, del parallelogramma e del trapezio quando si risolvono esercizi di calcolo oppure di costruzioni geometriche.
- Applicare il teorema di Pitagora.
- Costruire figure geometriche.
- Costruire la circonferenza inscritta e quella circoscritta al triangolo.
- Tracciare la tangente alla circonferenza da uno dei suoi punti e da un punto esterno ad essa.

- Conoscere ed applicare le proprietà dell'angolo alla circonferenza che insiste sul diametro.
- Conoscere ed applicare la definizione di similitudine tra i triangoli.
- Conoscere le funzioni trigonometriche degli angoli acuti nel triangolo rettangolo e saperle applicare

Aree

Area del parallelogramma, del triangolo, del trapezio, del romboide e del cerchio.

Teorema dei seni.

Teorema del coseno.

- Conoscere le unità di misura dell'area.
- Calcolare l'area del parallelogramma, del triangolo, del trapezio, del romboide, del cerchio, del settore circolare.
- Applicare il teorema dei seni.
- Applicare il teorema del coseno.
- Conoscere e calcolare il perimetro di una figura, la lunghezza di un arco di circonferenza.
- Dati gli elementi adeguati calcolare l'area, il lato, l'angolo, il perimetro, l'altezza, il raggio della circonferenza inscritta e di quella circoscritta ad un triangolo.

Area della superficie e volume dei solidi

Area della superficie e volume del prisma retto, del cilindro, della piramide, del cono e della sfera.

- Conoscere ed applicare le proprietà dei solidi retti (prisma, cilindro, piramide, cono) e sfera.
- Per un determinato solido, dati gli elementi, calcolare l'altezza del solido, lo spigolo laterale, quello di base, la diagonale spaziale, l'area della superficie laterale, l'area della sezione assiale, l'area della superficie totale ed il volume.
- Calcolare gli angoli, definiti dagli spigoli oppure dalle facce di un solido.

■ Funzioni ed equazioni algebriche

■ CONTENUTI, CONCETTI

La funzione lineare

Sistema di coordinate cartesiane nel piano.

Insiemi di punti nel piano.

Distanza tra due punti.

Funzione lineare: $x \mapsto kx + n$.

Equazione della retta.

Equazione e disequazione lineare.

Sistemi di equazioni lineari.

■ OBIETTIVI DA VERIFICARE

- Rappresentare semplici insiemi di punti nel piano.
- Calcolare la distanza tra due punti nel piano cartesiano.
- Tracciare il grafico della funzione lineare.
- Conoscere il significato delle costanti k e n .
- Determinare lo zero della funzione e il suo valore per $x = 0$.
- Scrivere l'equazione della retta nel piano, in forma esplicita, implicita e normale.
- Risolvere equazioni lineari.
- Risolvere disequazioni lineari.

La funzione di secondo grado

La funzione di secondo grado:

$$x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

Discriminante.

Vertice, zeri e grafico della funzione di secondo grado.

Equazioni di secondo grado.

Applicazione della funzione e dell'equazione di secondo grado.

Disequazioni di secondo grado.

- Risolvere sistemi di due e di tre equazioni lineari.
- Risolvere problemi che si possono tradurre in una equazione lineare oppure in un sistema di due equazioni lineari in due incognite.

- Scrivere la funzione di secondo grado disponendo di dati diversi.
- Calcolare il vertice, gli zeri, l'intersezione della funzione con l'asse delle ordinate e tracciarne il grafico.
- Scrivere la funzione nella forma generale, usando le coordinate del vertice oppure usando gli zeri della funzione. Passare da una forma alle altre due.
- Risolvere l'equazione di secondo grado ed altri quesiti che prevedono l'applicazione dell'equazione di secondo grado.
- Calcolare l'intersezione della parabola con una retta e l'intersezione di due parabole.
- Risolvere problemi che richiedono l'applicazione dell'equazione di secondo grado.
- Risolvere disequazioni di secondo grado.

La funzione potenza, polinomi e funzioni razionali

La funzione potenza.

Polinomi con coefficienti reali.

Zeri dei polinomi.

Algoritmo di Horner.

Grafico dei polinomi.

Funzioni razionali.

Equazioni e disequazioni razionali.

- Disegnare il grafico della funzione potenza con esponente intero.
- Scomporre un polinomio in fattori.
- Determinare gli zeri di un polinomio.
- Applicare l'algoritmo di Horner (Ruffini).
- Tracciare il grafico di un polinomio.
- Scrivere la funzione polinomiale usando i dati a disposizione.
- Risolvere disequazioni del tipo:
$$p(x) > 0, p(x) < 0, p(x) \geq 0, p(x) \leq 0.$$
- Conoscere la definizione e l'equazione della funzione razionale.
- Determinare gli zeri, i poli e gli asintoti orizzontali.
- Tracciare il grafico di una funzione razionale.
- Risolvere equazioni e disequazioni razionali.

■ Funzioni ed equazioni trascendenti

■ CONTENUTI, CONCETTI

Funzione esponenziale e logaritmica

Funzione esponenziale:

$$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1.$$

Proprietà e grafico della funzione esponenziale.

Equazione esponenziale.

Logaritmi.

Cambiamento di base dei logaritmi.

Funzione logaritmica.

Proprietà e grafico della funzione logaritmica.

Equazione logaritmica.

Funzioni trigonometriche

Funzioni trigonometriche.

Definizione delle funzioni goniometriche:

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

Proprietà delle funzioni goniometriche.

Teoremi di addizione.

Grafici delle funzioni goniometriche.

■ OBIETTIVI DA VERIFICARE

- Disegnare il grafico di funzioni logaritmiche ed esponenziali (prive di spostamenti e dilatazioni).
- Risolvere equazioni esponenziali semplici (con base uguale, mettendo in evidenza il fattore comune).
- Acquisire il concetto di logaritmo.
- Applicare le regole per il calcolo logaritmico.
- Risolvere semplici equazioni logaritmiche. (usando anche la calcolatrice tascabile).
- Cambiare la base dei logaritmi usando la calcolatrice tascabile.
- Conoscere i logaritmi decimali e naturali.

- Conoscere ed applicare le definizioni delle funzioni trigonometriche.
- Tracciare i grafici delle funzioni:
 $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x, f(x) = \operatorname{tg} x$
- Calcolare gli zeri, le ascisse dei massimi e dei minimi delle funzioni goniometriche.
- Usare le relazioni tra le funzioni goniometriche aventi lo stesso angolo, aventi angoli complementari e angoli supplementari.
- Applicare la periodicità, la proprietà di funzione pari ovvero dispari alle funzioni seno, coseno, tangente e applicare i teoremi di addizione.
- Calcolare l'angolo tra due rette.

■ Successioni

■ CONTENUTI, CONCETTI

Definizione di successione $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proprietà delle successioni (crescita, decrescita, limiti).

Progressioni aritmetiche e geometriche.

Somma dei primi n termini di una progressione aritmetica e geometrica.

Capitalizzazione semplice e composta.

■ OBIETTIVI DA VERIFICARE

- Determinare le proprietà di una successione (crescente, decrescente, limitata).
- Disegnare il grafico di una successione.
- Acquisire la definizione di progressione aritmetica e di progressione geometrica.
- Calcolare la somma dei primi n termini di una progressione aritmetica
- Calcolare la somma dei primi n termini di una progressione geometrica.
- Conoscere e distinguere la capitalizzazione semplice e quella composta.
- Calcolare il montante di un capitale e il periodo di capitalizzazione.

■ Elaborazione dati (statistica)

■ CONTENUTI, CONCETTI

Concetti fondamentali della statistica.
Classifica e ordinamento di dati.
Rappresentazione di dati.
Valore medio.

■ OBIETTIVI DA VERIFICARE

- Usare i concetti fondamentali della statistica (popolazione, unità statistica, campione, variabile statistica).
- Ordinare i dati statistici.
- Usare il concetto di frequenza assoluta e frequenza relativa.
- Rappresentare graficamente dati statistici (istogramma, poligono delle frequenze, areogramma).
- Determinare il valore medio (moda, mediana, media aritmetica).

Per i programmi che sono entrati in vigore dopo l'anno 2004, sono materia d'esame (parte orale dell'esame) pure i due capitoli seguenti.

■ Calcolo differenziale

■ CONTENUTI, CONCETTI

Derivata di una funzione.
Derivata e andamento locale di una funzione.

■ OBIETTIVI DA VERIFICARE

- Usare le regole per derivare funzioni semplici e composte.
- Tramite la derivata determinare le proprietà di una funzione.
- Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione.
- Risolvere semplici problemi sui valori estremi di una funzione.

■ Fondamenti di calcolo della probabilità

■ CONTENUTI, CONCETTI

Fondamenti di calcolo combinatorio
Probabilità di un evento aleatorio

■ OBIETTIVI DA VERIFICARE

- Conoscere ed applicare il teorema fondamentale del calcolo combinatorio.
- Riconoscere permutazioni, combinazioni e disposizioni semplici e con ripetizione, calcolare il loro numero.
- Calcolare la probabilità di un evento aleatorio.

5. ADATTAMENTI PER CANDIDATI DIVERSAMENTE ABILI

Le modalità di svolgimento e valutazione dell'esame di matematica vengono adattate per i candidati diversamente abili già inclusi nei programmi d'istruzione con apposita delibera di orientamento, ma anche per altri candidati che per giustificabili ragioni (infortunio, malattia) presentino menomazioni, impedimenti o disturbi di un certo tipo e grado. In questi casi vale quanto previsto dall'articolo 4 della Legge sull'esame di maturità e dal capitolo *Adattamenti per i candidati diversamente abili* del Catalogo dell'esame di maturità per gli Istituti tecnici.

6. ALLEGATI

6.1 SIMBOLI MATEMATICI

■ Insiemi

\in	è elemento di
\notin	non è elemento di
$\{x_1, x_2, \dots\}$	insieme i cui elementi sono $x_1, x_2 \dots$
$\{x; \dots\}$	insieme di tutti gli x tali che ...
\emptyset	insieme vuoto
\mathbb{N}	insieme dei numeri naturali
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}	insieme dei numeri interi
\mathbb{Z}^+	insieme dei numeri interi positivi
\mathbb{Z}^-	insieme dei numeri interi negativi
\mathbb{Q}	insieme dei numeri razionali
\mathbb{Q}^+	insieme dei numeri razionali positivi
\mathbb{Q}^-	insieme dei numeri razionali negativi
$\mathbb{R}, (-\infty, \infty)$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}^+, (0, \infty)$	insieme dei numeri reali positivi
$\mathbb{R}_0^+, [0, \infty)$	insieme dei numeri reali non negativi
$\mathbb{R}^-, (-\infty, 0)$	insieme dei numeri reali negativi
\cup	unione
\cap	intersezione
$\setminus, -$	differenza di due insiemi
$[a, b]$	intervallo chiuso $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$
$[a, b), [a, b[$	intervallo $\{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$
$(a, b],]a, b]$	intervallo $\{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$
$(a, b),]a, b[$	intervallo aperto $\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$

■ Relazioni ed operazioni

(a, b)	coppia ordinata
$=$	è uguale a
\neq	non è uguale a
\doteq	è approssimativamente uguale a
$<$	è minore
\leq	è minore o uguale a
$>$	è maggiore di
\geq	è maggiore o uguale a
$+$	più
$-$	meno
\cdot	volte
$:$	diviso
$a b$	a divide b
$MCD(a, b)$	massimo comune divisore dei numeri a e b
$mcm(a, b)$	minimo comune multiplo dei numeri a e b
Σ	simbolo della sommatoria
$ a $	valore assoluto di a

■ Geometria

$d(A, B)$	distanza tra i punti A e B
$ AB $	lunghezza del segmento AB
\sphericalangle	angolo
\triangle	triangolo
\parallel	è parallelo a
\perp	è perpendicolare a
\cong	è congruente a
\sim	è simile a
$A(x, y)$	il punto A di coordinate x e y
A	area
V	volume
A_t	area totale
R	raggio della circonferenza circoscritta al triangolo
r	raggio della circonferenza inscritta al triangolo

■ Funzioni

f	funzione f
$f: A \rightarrow B$	applicazione di A in B
$x \mapsto f(x)$	ad x viene applicato $f(x)$
D_f	dominio della funzione f
Z_f	codominio (insieme dei valori) della funzione f
$f' = \frac{df}{dx}$	derivata (prima) della funzione f

■ Elaborazione dati (statistica)

\bar{x}, μ	valore medio
----------------	--------------

■ Calcolo combinatorio e calcolo della probabilità

P_n	numero di permutazioni senza ripetizione di n elementi
$n!$	n fattoriale
D_n^r	numero di disposizioni semplici di n elementi, di classe r
${}^{(p)}D_n^r$	numero di disposizioni con ripetizione di n elementi, di classe r
$\binom{n}{k}$	simbolo del coefficiente binomiale di ordine n e di classe k (n su k)
$C_n^r = \binom{n}{r}$	numero di combinazioni semplici di n elementi, di classe r
C	evento certo
I	evento impossibile
E_1, E_2, E_3, \dots	eventi incerti o aleatori
A'	evento contrario di A
$A \cup B$	evento unione o evento totale dei due eventi A e B
$A \cap B, A \cdot B$	evento composto o prodotto logico degli eventi A e B
$A \setminus B$	evento differenza degli eventi A e B
$A \subset B$	A è una modalità dell'evento B
$P(A)$	probabilità dell'evento A

6.2 FORMULE ALLEGATE AL FASCICOLO D'ESAME

1. Sistema di coordinate cartesiane nel piano, funzione lineare

- **Distanza tra due punti nel piano:** $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- **Funzione lineare:** $f(x) = kx + n$
- **Coefficiente angolare:** $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- **Angolo d'inclinazione della retta:** $k = \operatorname{tg} \varphi$
- **Angolo tra due rette:** $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|$

2. Geometria del piano (le aree delle figure sono indicate con A)

- **Triangolo:** $A = \frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \gamma$
 $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = \frac{a+b+c}{2}$
- **Raggio della circonferenza inscritta (r) e di quella circoscritta (R) ad un triangolo:**
 $r = \frac{A}{s}$, $\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$; $R = \frac{abc}{4A}$
- **Triangolo equilatero:** $A = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, $h = \frac{a \sqrt{3}}{2}$, $r = \frac{a \sqrt{3}}{6}$, $R = \frac{a \sqrt{3}}{3}$
- **Rombo e romboide:** $A = \frac{e \cdot f}{2}$ • **Rombo:** $A = a^2 \operatorname{sen} \alpha$ • **Trapezio:** $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$
- **Parallelogramma:** $A = ab \operatorname{sen} \alpha$
- **Lunghezza di un arco di circonferenza:** $l = \frac{\pi r \alpha^\circ}{180^\circ}$
- **Area di un settore circolare:** $A = \frac{\pi r^2 \alpha^\circ}{360^\circ}$
- **Teorema dei seni:** $\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = 2R$
- **Teorema del coseno:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

3. Aree e volumi dei solidi (B indica l'area di base)

- **Prisma:** $A_t = 2B + A_l$, $V = B \cdot h$
- **Piramide:** $A_t = B + A_l$, $V = \frac{1}{3} B \cdot h$
- **Sfera:** $A_t = 4\pi r^2$, $V = \frac{4\pi r^3}{3}$
- **Cilindro:** $A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, $V = \pi r^2 h$
- **Cono:** $A_t = \pi r(r + l)$, $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

4. Funzioni goniometriche

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
- $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

5. Funzioni ed equazioni di secondo grado

- $f(x) = ax^2 + bx + c$ **Vertice:** $V(p, q)$, $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{D}{4a}$, $D = b^2 - 4ac$
- $ax^2 + bx + c = 0$ **Zeri:** $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

6. Logaritmi

- $\log_a y = x \Leftrightarrow a^x = y$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

7. Successioni

- **Progressione aritmetica:** $a_n = a_1 + (n-1)d$, $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$
- **Progressione geometrica:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$
- **Montante a capitalizzazione semplice:** $M = C + I$; $I = \frac{C \cdot n \cdot p}{100}$
- **Montante a capitalizzazione composta:** $M = C(1+i)^n$, $i = \frac{p}{100}$

8. Elaborazione dati (statistica)

- **Valore medio (media aritmetica):** $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}$,
 $\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + \dots + f_k \cdot x_k}{f_1 + f_2 + \dots + f_k}$

6.3 ESEMPI TIPICI DI QUESITI D'ESAME

Indicazioni: Il punto indicato con (*) viene assegnato per il procedimento. Il candidato riceve questo punto se ha adottato un procedimento corretto ma, a causa di qualche errore oppure di dati errati, ottiene un risultato errato.

1. INSIEMI NUMERICI

1. Semplifica l'espressione:

$$\left(a - \frac{3a+1}{4}\right) \cdot \frac{8}{a^2-1}$$

(4 punti)

Soluzione e valutazione:

Semplificazione dell'espressione in parentesi: $\frac{a-1}{4}$ (1* + 1) 2 punti

Fattorizzazione dell'espressione: $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ 1 punto

Soluzione: $\frac{2}{a+1}$ 1 punto

2. Siano dati i numeri naturali 75, 1024, 1782, 3240, 5052. Tra questi trovate quelli divisibili per 5 e poi determinate il loro massimo comune divisore.

(4 punti)

Soluzione e valutazione:

Per l'individuazione dei due numeri divisibili per 5, che sono 75 e 3240 1 punto

Per la rappresentazione dei due numeri come prodotti di potenze di numeri primi con le basi:

$75 = 3 \cdot 5^2$, $3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$ (1 + 1*) 2 punti

Soluzione: $MCD(75, 3240) = 15$ 1 punto

3. Il prezzo iniziale di un'automobile è aumentato del 20 %. Più tardi il nuovo prezzo è sceso del 25 % e ammonta a 18090 euro. Calcolate il prezzo iniziale dell'automobile.

(4 punti)

Soluzione e valutazione:

Per l'impostazione dell'equazione: $x \cdot 1,20 \cdot 0,75 = 18090$ euro (1+ + 1 + 1) 3 punti

Soluzione: $x = 20100$ euro 1 punto

2. GEOMETRIA

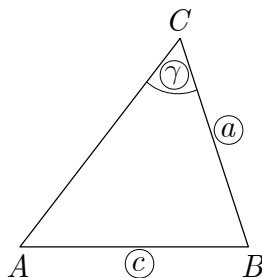
2.1 Geometria del piano

1. Disegna e segna il triangolo ABC di cui sono dati: $a = 5$ cm, $c = 8$ cm in $\gamma = 60^\circ$.
Disegna pure lo schizzo.

(4 punti)

Soluzione e valutazione:

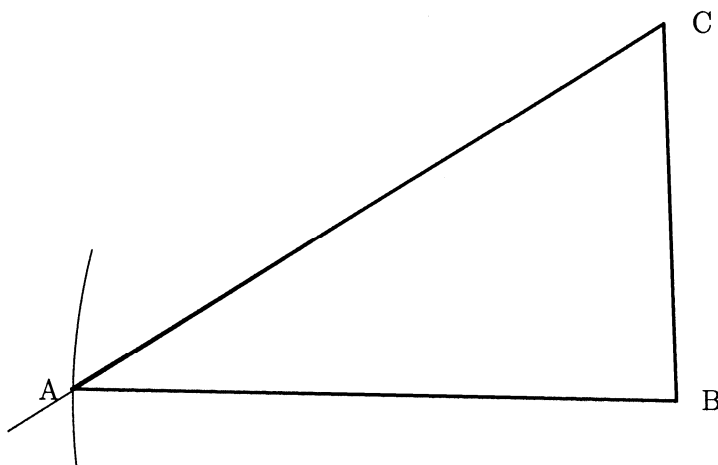
Per lo schizzo 1 punto



Se vengono tracciati il lato a e l'angolo γ 1 punto

Se il triangolo ha definito il vertice A con l'arco di circonferenza ben visibile 1 punto

Se il triangolo ha i vertici segnati ABC 1 punto



Imprecisioni tollerate: ± 2 mm per le lunghezze e $\pm 2^\circ$ per gli angoli.

2. In un triangolo isoscele ciascuno dei lati uguali misura 6,5 cm mentre l'altezza relativa alla base misura 5,2 cm. Calcolate l'area del triangolo.

(4 punti)

Soluzione e valutazione:

Per l'applicazione del teorema di Pitagora, per es.: $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = 6,5^2 - 5,2^2$ 1 punto

Per il calcolo della base, per es.: $c = 7,8$ cm 1 punto

Per l'applicazione della formula per l'area del triangolo, per es.: $A = \frac{7,8 \cdot 5,2}{2}$ 1 punto

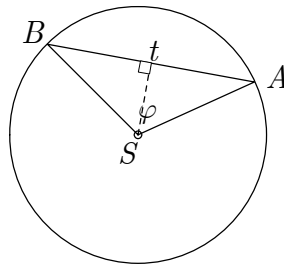
Soluzione: $A = 20,28$ cm² 1 punto

3. In una circonferenza di 6 cm di raggio calcola la lunghezza della corda relativa all'angolo al centro di 120° . Disegna lo schizzo.

(4 punti)

Soluzione e valutazione:

Per lo schizzo 1 punto



1° procedimento:

Per l'applicazione del teorema del coseno, per es.:

$|AB|^2 = |AS|^2 + |BS|^2 - 2 \cdot |AS| \cdot |BS| \cdot \cos \varphi$ 1 punto

Soluzione. $|AB| = 6\sqrt{3}$ cm oppure $t \doteq 10,4$ cm (10,39 cm) (1* + 1) 2 punti

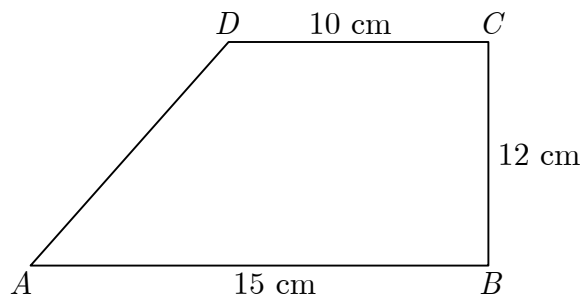
2° procedimento:

$\left(\frac{t}{2}\right) = |AS| \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ 1 punto

Soluzione: $t = 6\sqrt{3}$ cm oppure $t \doteq 10,4$ cm (10,39 cm) (1* + 1) 2 punti

2.2 Aree

1. Calcolate il perimetro e l'area della figura disegnata sotto:



(5 punti)

Soluzione e valutazione:

Per l'area del trapezio. $A = 150 \text{ m}^2$ (1* + 1) 2 punti

Per il calcolo del lato: $|AD| = 13 \text{ m}$ (1* + 1) 2 punti

Per il calcolo del perimetro del trapezio: $p = 50 \text{ m}$ 1* punto

2.3 Aree e volumi di solidi

1. Le dimensioni di un foglio di carta di forma rettangolare sono 15 e 10 cm.

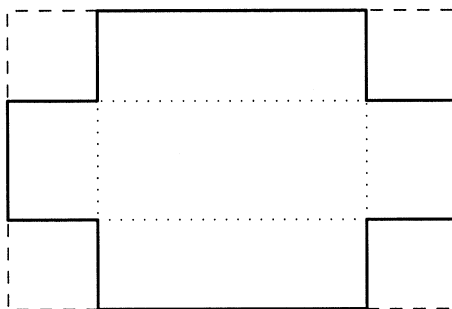
(Totale: 15 punti)

a) Se il foglio viene arrotolato, esso diventa un cilindro la cui altezza è uguale al lato minore del rettangolo. Calcola il volume di questo cilindro al cm^3 di precisione.

(5 punti)

b) Se ai vertici del rettangolo vengono ritagliati dei quadrati di 3 cm di lato, come indica la figura, si ottiene lo sviluppo piano di una scatola senza coperchio. Determina gli spigoli della scatola e calcolane il volume.

(5 punti)



c) Calcola quale percentuale rappresenta la base della scatola rispetto alla sua area totale.

(5 punti)

Soluzione e valutazione:

a) 5 punti

Per il calcolo del raggio della base del cilindro: $r \doteq 2,387 \text{ cm}$ (1* + 1) 2 punti

Per il calcolo del volume del cilindro, per es.: $V \doteq 179,047 \text{ cm}^3$ (1* + 1) 2 punti

Per l'arrotondamento del risultato: $V \doteq 179 \text{ cm}^3$ 1 punto

b) 5 punti

Per la determinazione delle lunghezze degli spigoli della scatola: 9 cm, 4 cm e 3 cm, per ognuno

1 punto, totale 3 punti

Per il calcolo del volume della scatola: $V = 108 \text{ cm}^3$ (1* + 1) 2 punti

c) 5 punti

Area della scatola: $A_{totale} = 114 \text{ cm}^2$ (1* + 1) 2 punti

Area della base della scatola: $A_{base} = 36 \text{ cm}^2$ 1 punto

Percentuale. $p \doteq 32 \%$ (31,6 % oppure 31,57 %) (1* + 1) 2 punti

2. Un recipiente di forma cilindrica e dalla capacità di 500 litri è riempito di nafta fino a metà. Quando il recipiente è in posizione verticale il livello della nafta arriva a 0,6 m dalla base.

(15 punti)

a) Disegnate uno schizzo del recipiente e calcolate il raggio della sua base.

(8 punti)

b) A quale altezza arriva il livello della nafta se il recipiente viene collocato in posizione orizzontale?

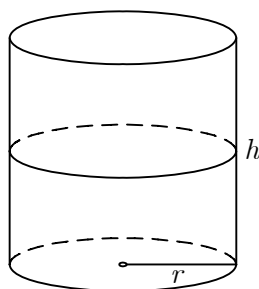
(2 punti)

c) Quanti dm^2 di lamiera sono stati utilizzati per costruire il recipiente?

(5 punti)

Soluzione e valutazione:

a) 8 punti



- Per lo schizzo del cilindro 1 punto
- Per l'indicazione del volume in cm^3 : $V = 500000 \text{ cm}^3$ 1 punto
- Per la trasformazione e il successivo calcolo dell'altezza, per es.: $h = 120 \text{ cm}$ (1* + 1) 2 punti
- Per l'applicazione della formula del volume, per es.: $V = \pi r^2 \cdot h$ 1 punto
- Per il calcolo del raggio (1* + 1) 2 punti
- Soluzione: $r = 36,4 \text{ cm}$ 1 punto

b) 2 punti

- Per il risultato: $h_1 = r = 36,4 \text{ cm}$ 1 punto
- Risposta: Se il recipiente viene messo in posizione orizzontale il livello della nafta arriva a $36,4 \text{ cm}$ 1 punto

c) 5 punti

- Per l'applicazione della formula contenente i dati del quesito:
 $A = 2 \cdot \pi \cdot 36,4^2 + 120 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 36,4$ (1* + 1) 2 punti
 - Risultato: $A = 35778 \text{ cm}^2$ 1 punto
 - Per la trasformazione del risultato: $A = 358 \text{ dm}^2$ 1 punto
 - Risposta: Per costruire il recipiente vengono utilizzati 358 dm^2 di lamiera 1 punto
- Nota: si accettano come validi anche i risultati ottenuti con arrotondamenti appropriati.*

3. FUNZIONI ED EQUAZIONI ALGEBRICHE

3.1 La funzione lineare

1. Risolvi il sistema di equazioni: $\frac{x}{3} + 2y = 4$

$$\frac{x}{2} + y = 2$$

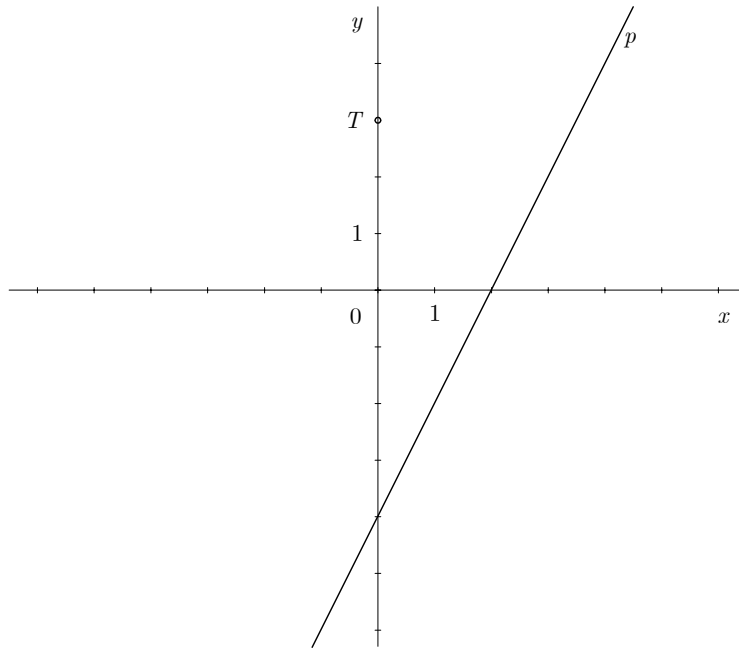
(4 punti)

Soluzione e valutazione:

- Procedimento risolutivo 2* punti
- Soluzione: $x = 0, y = 2$ (1 + 1) 2 punti

2. Scrivi l'equazione della retta parallela alla retta p e passante per il punto T .

(4 punti)



Soluzione e valutazione:

- Per la determinazione delle coordinate del punto $T(0, 3)$ 1 punto
- Per il calcolo del coefficiente angolare: $k = 2$ 1 punto
- Per l'applicazione dell'equazione della retta, per es.: $y - y_0 = k(x - x_0)$ 1 punto
- Soluzione: $y = 2x + 3$ 1 punto

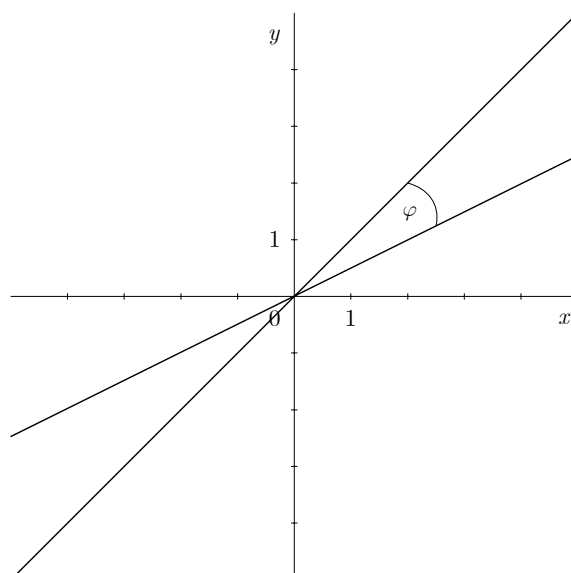
3. Due rette attraversano l'origine del sistema cartesiano. La prima passa per il punto $A(3, 3)$, la seconda per il punto $B(6, 3)$.

(Totale 15 punti)

- a) Traccia le due rette e scrivi le rispettive equazioni. (6 punti)
- b) Calcola l'angolo tra le due rette con una precisione al minuto primo. (6 punti)
- c) Calcola l'area del triangolo OAB , determinato dai punti A , B e dall'origine O del sistema cartesiano. (3 punti)

Soluzione e valutazione:

- a) 6 punti
Per aver tracciato le rette (1 + 1) 2 punti



Per l'equazione della prima retta: $y = x$ 2 punti

Per l'equazione della seconda retta: $y = \frac{1}{2}x$ 2 punti

b) 6 punti

1° procedimento:

Angolo d'inclinazione della prima retta: $\alpha_1 = 45^\circ$ 2 punti

Angolo d'inclinazione della seconda retta: $\alpha_2 = 26^\circ 34'$ 2 punti

Angolo tra le rette: $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 \doteq 18^\circ 26'$ 2 punti

2° procedimento:

Coefficienti angolari delle due rette. $k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{2}$ (1 + 1) 2 punti

Per l'applicazione della formula corrispondente.....1 punto

Per il calcolo dell'angolo tra le rette, per es.: $\varphi \doteq 18^\circ 26'$ (1* + 2) 3 punti

c) 3 punti

Area del triangolo OAB : $A = \frac{9}{2}(4,5)$ (1* + 2) 3 punti

3.2 La funzione di secondo grado

1. Data la funzione $f(x) = -x^2 + 2x + 8$, determina il suo vertice e le intersezioni del suo grafico con gli assi cartesiani.

(5 punti)

Soluzione e valutazione:

Per la determinazione del vertice

Vertice, per es.: $V(1,9)$ oppure $p = 1, q = 9$ (1* + 1) 2 punti

Intersezioni con gli assi cartesiani

Intersezione con l'asse delle ordinate: $f(0) = 8$ oppure $N(0,8)$ 1 punto

Zeri ovvero intersezioni con l'asse delle ascisse applicando la formula oppure fattorizzando

$x_1 = 4, x_2 = -2$ oppure $A(-2,0), B(4,0)$ 2 punti

2. Sono date due funzioni $f(x) = -x^2 - x + 6$ e $g(x) = x + 3$.

(Totale 15 punti)

a) Disegna entrambi i grafici sullo stesso sistema cartesiano.

(7 punti)

b) Calcola le coordinate dei punti d'intersezione dei due grafici.

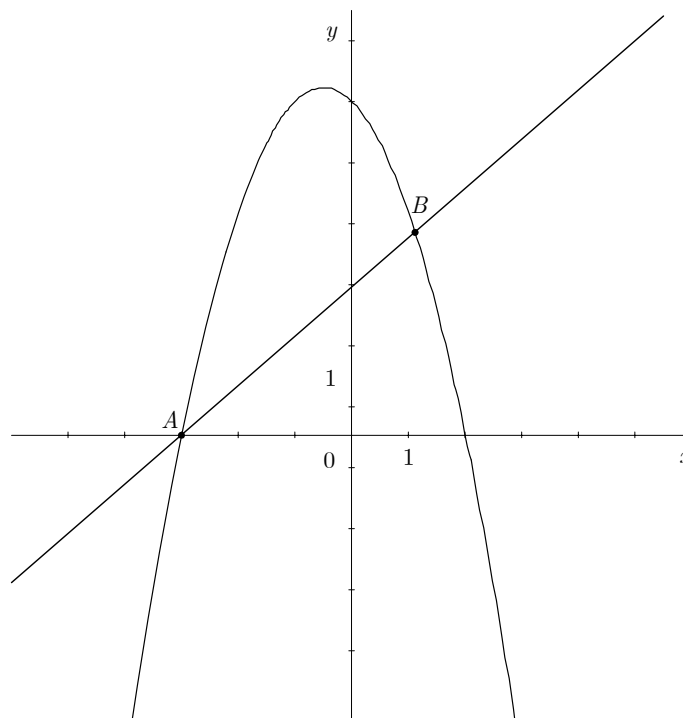
(5 punti)

c) Calcola la distanza tra i due punti d'intersezione. Estrai la radice parziale del risultato.

(3 punti)

Soluzione e valutazione:

a) 7 punti



Per aver tracciato la retta 1 punto

Per aver tracciato la parabola 6 punti

di cui:

per gli zeri. $x_1 = -3, x_2 = 2$ 1 punto

per il vertice: $V\left(-\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}\right)$ 2 punti

per l'intersezione della parabola con l'asse delle ordinate: $N(0, 6)$ 1 punto

per il grafico corretto della parabola 2 punti

b) 5 punti

Per l'impostazione dell'equazione, per es.: $-x^2 - x + 6 = x + 3$ 1 punto

Per l'ordinamento dell'equazione, per es.: $x^2 + 2x - 3 = 0$ 1 punto

Per le soluzioni dell'equazione: $x_1 = 3, x_2 = 1$ (1* + 1) 2 punti

Per il calcolo delle ordinate: $y_1 = 0, y_2 = 4$ 1 punto

c) 3 punti

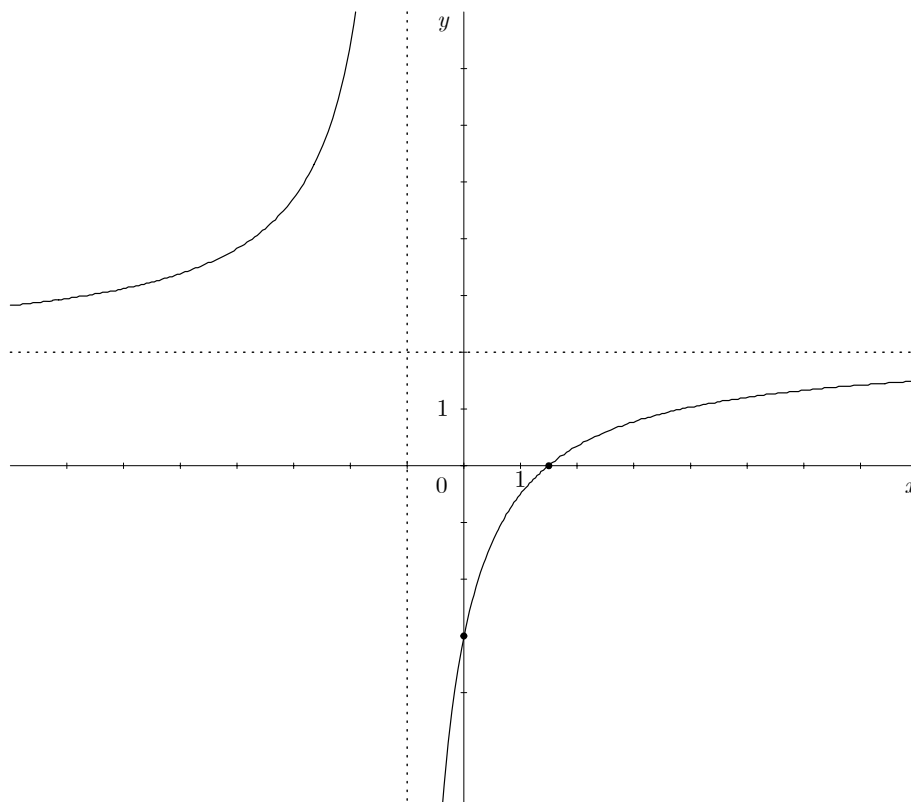
Per il calcolo della distanza: $\sqrt{32}$ (1* + 1) 2 punti

Per la soluzione: $4\sqrt{2}$ 1 punto

3.3 La funzione potenza, polinomi e funzioni razionali

1. La figura rappresenta il grafico di una funzione. Scrivi l'equazione dell'asintoto orizzontale, il polo e lo zero della funzione. Determina e scrivi l'intervallo in cui la funzione assume valori negativi.

(5 punti)



Soluzione e valutazione:

Asintoto orizzontale: $y = 2$ 1 punto

Polo: $x = -1$ 1 punto

Zero: $x = \frac{3}{2}$ 1 punto

La funzione assume valori negativi nell'intervallo $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

oppure per $-1 < x < \frac{3}{2}$ (1 + 1) 2 punti

2. È dato il polinomio $p(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2(x+2)$.

(15 punti)

- a) Determinate tutti gli zeri e disegnate il grafico approssimativo del polinomio nel sistema cartesiano proposto.

(8 punti)

- b) Scrivete i coefficienti del polinomio.

(4 punti)

- c) Definite l'intervallo in cui il polinomio assume valori negativi

(3 punti)

Soluzione e valutazione:

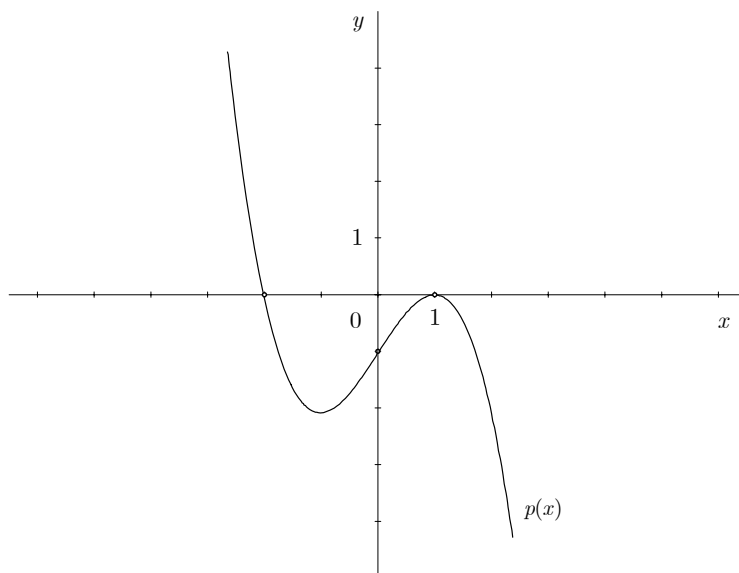
a) 8 punti

Zeri: $x_{1,2} = 1, x_3 = -2$ (1 + 1) 2 punti

Calcolo: $p(0) = -1$ 1 punto

Per il grafico del polinomio 5 punti

Nota: Al candidato vengono assegnati 3 punti se il suo grafico passa per i punti $(1, 0)$, $(-2, 0)$ e $(0, -1)$ e altri 2 punti per l'andamento corretto del grafico.



b) 4 punti

Per l'elencazione dei coefficienti:

$a_3 = -\frac{1}{2}, a_2 = 0, a_1 = \frac{3}{2}, a_0 = -1$ (1 + 1 + 1 + 1) 4 punti

Nota: Se il candidato scrive il polinomio nella forma normale riceve 2 punti.

Il candidato riceve 2 punti anche se riporta correttamente i coefficienti da una forma normale errata.

c) 3 punti

Soluzione: $(-2, 1) \cup (1, \infty)$ (1 + 1 + 1) 3 punti

Nota: Se il candidato include negli intervalli anche -2 o 1, riceve 2 punti

3. Sia data la funzione $f(x) = \frac{2x + 2}{x - 1}$

(Totale 15 punti)

a) Determina lo zero, l'asintoto orizzontale e l'intersezione del grafico con l'asse delle ordinate.

(4 punti)

b) Traccia il grafico della funzione e scrivi il suo dominio e il suo codominio.

(7 punti)

c) Calcola l'intersezione del grafico della funzione $f(x)$ con la retta $y = 1$.

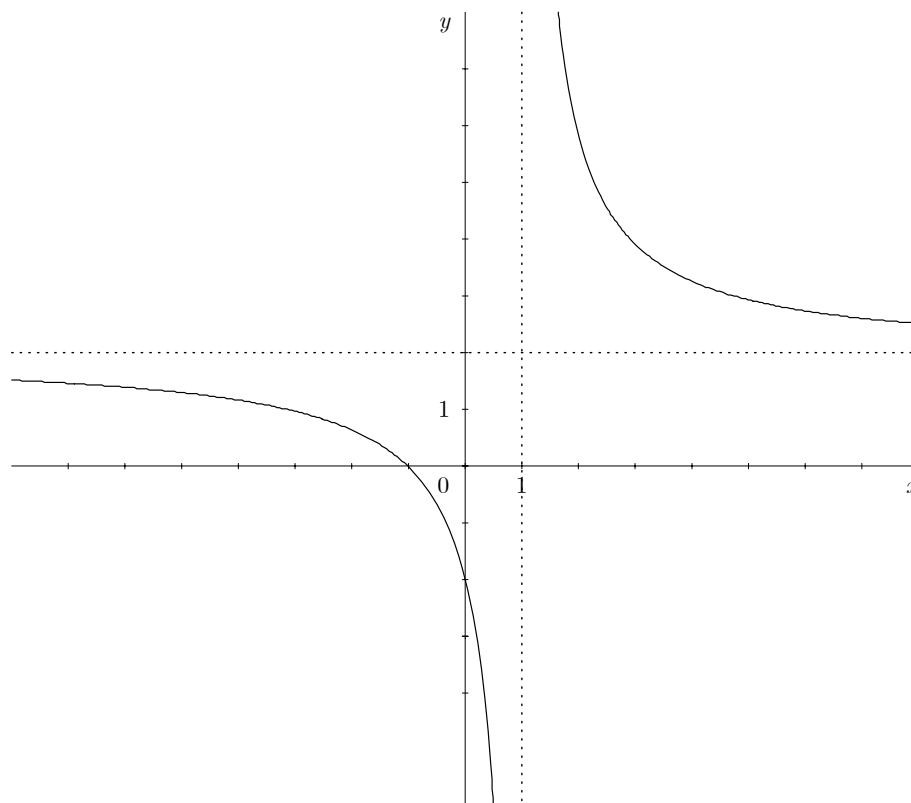
(4 punti)

Soluzione e valutazione:

a) 4 punti

- Zero: $x_1 = -1$ 1 punto
- Polo: $x_2 = 1$ 1 punto
- Asintoto orizzontale: $y = 2$ 1 punto
- Intersezione con l'asse delle ordinate: $f(0) = -2$ oppure $N(0, -2)$ 1 punto

b) 7 punti



- Il grafico passa per i punti $M(-1, 0)$ e $N(0, -2)$
 (le intersezioni del grafico con gli assi cartesiani)..... 2 punti
- Per aver tracciato i due asintoti..... 1 punto
- Per ogni ramo del grafico 1 punto, totale 2 punti
- Dominio della funzione: insieme dei numeri reali escluso l'unità oppure la notazione simbolica,
 per es.: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ 1 punto
- Codominio della funzione: insieme dei numeri reali escluso il 2 oppure la notazione simbolica,
 per es.: $Z_f = \mathbb{R} - \{2\}$ 1 punto

c) 4 punti

- Per l'impostazione dell'equazione, per es.: $\frac{2x+2}{x-1} = 1$ 1 punto
- Per la soluzione dell'equazione: $x = -3$ (1* + 1) 2 punti
- Per l'indicazione del punto d'intersezione: $P(-3, 1)$ 1 punto

4. FUNZIONI ED EQUAZIONI TRASCENDENTI

4.1 Funzione esponenziale e logaritmica

1. Risolvi l'equazione:

$$\log(x-1) + \log(x+2) = 2 \log x.$$

(5 punti)

Soluzione e valutazione:

Per l'applicazione delle proprietà dei logaritmi::

$\log(x-1)(x+2) = \log x^2$ (1 + 1) 2 punti

$(x-1)(x+2) = x^2$ 1 punto

Per la semplificazione dell'equazione e per la soluzione: $x = 2$ (1* + 1) 2 punti

2. Risolvi le seguenti equazioni: a) $3^{2x-5} = 27$ b) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right) = x$

(5 punti)

Soluzione e valutazione:

a) Per il procedimento, per es.: $3^{2x-5} = 3^3$ 1 punto

Per l'impostazione dell'equazione, per es.: $2x - 5 = 3$ 1 punto

Per la soluzione: $x = 4$ 1 punto

b) Per il procedimento, per es.: $2^x = \frac{1}{4}$ 1 punto

Per la soluzione: $x = -2$ 1 punto

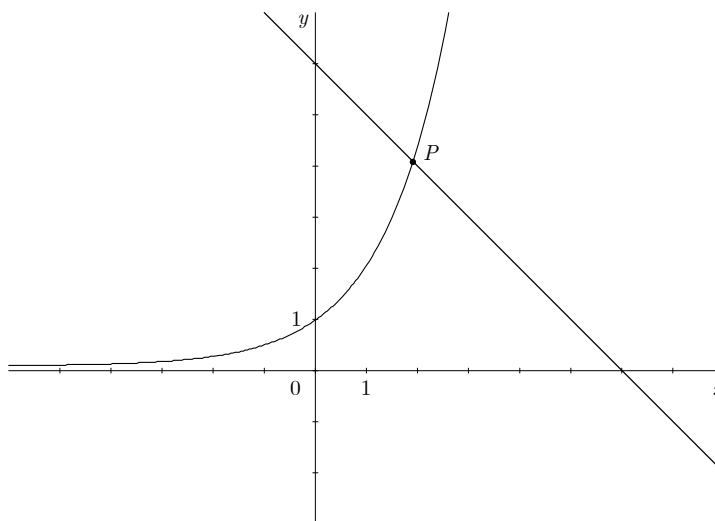
3. Siano date le funzioni $f(x) = 2^x$ e $g(x) = -x + 6$. Disegna il loro grafico nello stesso sistema cartesiano. Leggi dalla figura le coordinate del punto d'intersezione dei due grafici e verifica il loro valore con il calcolo.

(5 punti)

Soluzione e valutazione:

Per il grafico della funzione esponenziale 2 punti

Per la retta 1 punto



Per la determinazione del punto d'intersezione: $P(2, 4)$ 1 punto

Per il calcolo, per es.: $f(2) = 2^2 = 4$ e $g(2) = -2 + 6 = 4$ 1 punto

4.2 Funzioni trigonometriche

1. Collegare tra loro due espressioni in modo che assumano i medesimi valori per qualunque valore di x .

$\text{sen}(-x)$	$\text{sen } x$
$\cos(x + 360^\circ)$	$\text{sen}^2 x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$	$-\text{sen } x$
$\cos(x - \pi)$	$-\cos x$
$1 - \cos^2 x$	$\cos x$

(5 punti)


Soluzione e valutazione:

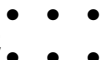
Collegamento: $\text{sen}(-x) = -\text{sen } x$	1 punto
Collegamento: $\cos(x + 360^\circ) = \cos x$	1 punto
Collegamento: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x$	1 punto
Collegamento: $\cos(x - \pi) = -\cos x$	1 punto
Collegamento: $1 - \cos^2 x = \text{sen}^2 x$	1 punto

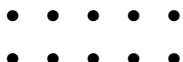
5. SUCESSIONI

1. Usando dei sassolini Mauro ha formato dei modelli in sequenza. I primi tre sono illustrati nella figura sotto. Quanti sassolini ha usato per formare il tredicesimo modello, che con i 12 precedenti forma una progressione aritmetica?

(5 punti)

Modello n. 1 

Modello n. 2 

Modello n. 3 

Soluzione e valutazione

Per l'indicazione dei primi tre termini: $a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 10$	1 punto
Per il calcolo di $d = 4$	1 punto
Per l'applicazione della formula: $a_{13} = a_1 + (13 - 1) \cdot d$	1 punto
Per il risultato: $a_{13} = 50$	1 punto
Per la risposta: Per il tredicesimo modello ha utilizzato 50 sassolini	1 punto

2. In una progressione aritmetica di ragione il quinto termine è uguale ad un settimo del primo termine. Calcola il sesto termine di questa progressione.

(5 punti)

Soluzione e valutazione:

- Per l'espressione del termine generico di una successione aritmetica 1 punto
 Per l'indicazione della relazione tra il 1° e il 5° termine, per es.: $a_5 = \frac{a_1}{7}$ 1 punto
 Per l'impostazione dell'equazione, per es.: $a_1 - 12 = \frac{a_1}{7}$ 1 punto
 Per la risoluzione dell'equazione. $a_1 = 14$ 1 punto
 Per il calcolo: $a_6 = -1$ 1 punto

3. Nel 1998 le fabbriche A e B hanno prodotto la stessa quantità di manufatti, e cioè 120000 pezzi ciascuna. In seguito, ogni anno la produzione è aumentata del 10 %, nella fabbrica A, e di 12000 pezzi nella fabbrica B.

(Totale 15 punti)

- a) Con questo aumento produttivo quanti manufatti hanno prodotto le fabbriche A e B nell'anno 2002?

(5 punti)

- b) Nel 2001 di quale percentuale la produzione della fabbrica A superava quella della fabbrica B?

(6 punti)

- c) Quanti manufatti ha prodotto la fabbrica A dall'inizio dell'anno 1998 alla fine dell'anno 2001?

(4 punti)

Soluzione e valutazione:

- a) 5 punti

- Per l'impostazione dell'equazione, per es.: $A_{2002} = A_{1998} \cdot 1,1^4$ 2 punti
 Per il calcolo (o per la risposta) $A_{2002} = 175692$ 1 punto
 Per l'impostazione, per es.: $B_{2002} = 120000 + 4 \cdot 12000$ 1 punto
 Per il calcolo (oppure per la risposta) $B_{2002} = 168000$ 1 punto

- b) 6 punti

- Per l'impostazione e l'esecuzione del calcolo,
 per es.: $A_{2001} = 120000 \cdot 1,1^3 = 159720$ (1* + 1) 2 punti
 Per l'impostazione e l'esecuzione del calcolo,
 per es.: $B_{2001} = 120000 + 3 \cdot 12000 = 156000$ 1 punto
 Per l'impostazione e l'esecuzione del calcolo della percentuale,
 per es.: $p = \frac{A_{2001}}{B_{2001}}$ ($\doteq 1,0238 \dots$) (1* + 1) 2 punti
 Per la risposta: Circa del 2 % (oppure del 2,4 % oppure del 2,38 %) 1 punto

- c) 4 punti

1° procedimento:

- Per l'impostazione dell'equazione, per es.: $\Sigma A_{1998-2001} = \frac{120000 \cdot (1,1^4 - 1)}{1,1 - 1}$ (2* + 1) 3 punti
 Per la soluzione: $\Sigma A_{1998-2001} = 556920$ 1 punto

2° procedimento:

- Per il calcolo del numero di pezzi prodotti ogni anno, per es.:
 120000, 132000, 145200 in 159720 (2* + 1) 3 punti
 Per la somma oppure per la risposta: 556920 1 punto

6. ELABORAZIONE DATI (STATISTICA)

1. Le altezze degli allievi di una classe sono riportate nella seguente tabella.

Altezza in cm	Sesso
162	F
163	F
164	F
165	F
165	F
167	M
169	F
170	M
171	M
171	M
172	F
175	M
176	M
178	M
178	M
179	F
180	M
180	M
181	M
185	M

(15 punti)

a) Completate la seguente tabella e poi disegnate l'istogramma corrispondente alle 5 classi di valori.

Classe	Altezza in cm	Numero allievi
1	Più di 160 e fino a 165 inclusi	
2	Più di 165 e fino a 170 inclusi	
3	Più di 170 e fino a 175 inclusi	
4	Più di 175 e fino a 180 inclusi	
5	Più di 180 e fino a 185 inclusi	

(7punti)

b) Di quanti cm l'altezza media dei maschi si differenzia da quella media delle femmine?

(6 punti)

c) Quante femmine hanno un'altezza inferiore all'altezza media delle femmine in quella classe?

(2 punti)

Soluzione e valutazione

a) 7 punti

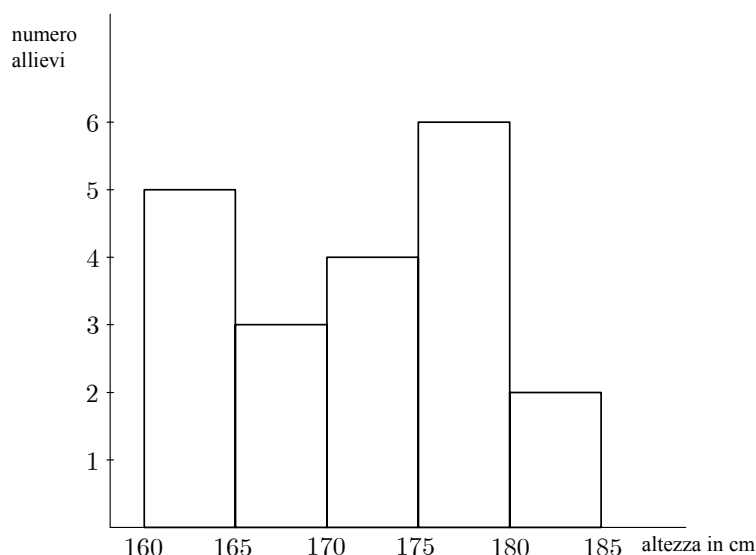
Per il completamento della tabella: 5, 3, 4, 6, 2 2 punti

Per ottenere 1 punto almeno 3 valori devono essere corretti.

Istogramma

Per gli assi 2 punti

Per l'istogramma 3 punti



b) 6 punti

Per il calcolo: $M_F = \frac{1339}{8} = 167,375 \text{ cm}$ 2 punti

Per il calcolo: $M_M = \frac{2112}{12} = 176 \text{ cm}$ 2 punti

Calcolo della differenza: $D = M_M - M_F = 8,625 \text{ cm}$ 1 punto

Risposta: In media l'altezza dei maschi è di 8,625 cm superiore a quella delle femmine.1 punto

Nota: Se il candidato ha arrotondato correttamente tutti i risultati, riceve tutti i punti previsti.

c) 2 punti

In quella classe 5 femmine hanno un'altezza inferiore alla media femminile della classe 2 punti

6.4 ISTRUZIONI PER VALUTARE I QUESITI DELLA PROVA SCRITTA

Con queste istruzioni si desidera fornire un orientamento di massima per l'assegnazione del punteggio ai quesiti della prova scritta dell'esame di maturità di matematica. Si tratta di indicazioni generali, che non si riferiscono ad un quesito specifico oppure ad un determinato argomento.

Le indicazioni sono destinate ai valutatori e ai candidati.

1. Regola fondamentale

Il candidato che risolve il quesito applicando qualunque metodo corretto (anche se non previsto dalla soluzione ufficiale) riceve tutti i punti previsti.

Per metodo corretto si intende ogni procedimento che:

- interpreti correttamente il testo del quesito,
- porti alla soluzione del problema,
- sia matematicamente corretto e completo.

La regola fondamentale non viene applicata a quei quesiti che devono seguire un metodo prescritto, per es. "risolvi graficamente". In questo caso l'uso di un metodo diverso è da considerarsi errato e la soluzione incompleta.

2. Correttezza del risultato e del procedimento

- a) Nei quesiti in cui si richiede di "calcolare esattamente" oppure che il risultato sia esatto, i numeri devono essere scritti in modo esatto, dunque in forma analitica, come per es. π , e , $\ln 2$, $\sqrt[3]{5}$... In modo esatto devono venir scritti pure tutti i risultati intermedi. Inoltre il risultato finale deve venir semplificato adeguatamente: le frazioni numeriche e quelle algebriche opportunamente ridotte, l'estrazione parziale dei radicali, i termini omogenei sommati, ecc.
- b) Nei quesiti in cui si richiede un determinato livello di precisione (per es. "Calcola con una precisione di due cifre decimali"), il risultato finale deve esser scritto con la precisione richiesta e adeguatamente arrotondato. È obbligatorio l'uso del simbolo \doteq (è approssimativamente uguale). I risultati intermedi devono essere il più possibile esatti altrimenti il risultato finale può risultare non sufficientemente preciso.
- c) Alcuni quesiti si possono risolvere sia graficamente che analiticamente. Siccome il metodo grafico non è molto preciso, di solito non viene applicato. Esso viene considerato corretto esclusivamente quando il suo impiego sia esplicitamente richiesto. Un risultato va verificato con il calcolo anche nel caso in cui possa essere agevolmente letto dal grafico.
- d) Se un quesito si conclude con una domanda (finisce con il segno "?"), si richiede la risposta completa.
- e) Se il candidato ha cancellato con un tratto di penna un procedimento oppure un risultato, questi non vengono considerati.
- f) Se i dati sono seguiti da unità di misura, per es. cm, kg, Euro ... anche i risultati finali devono riportare le corrispondenti unità di misura. L'uso di determinate unità di misura è obbligatorio soltanto quando esse sono esplicitamente richieste, altrimenti ogni unità adeguata è soddisfacente. Se il candidato non scrive l'unità di misura perde i punti previsti per il risultato finale. Nei calcoli intermedi le unità di misura non sono obbligatorie.
- g) Nei quesiti di geometria le ampiezze degli angoli (angolo fra due rette, angoli nel triangolo) vanno espresse in gradi e in centesimi di grado, oppure in gradi e in minuti.

3. Grafici delle funzioni

Se il sistema cartesiano è già tracciato, deve venir rispettato – non si cambiano le unità e non si spostano gli assi. Se invece il candidato lo deve tracciare allora deve segnare gli assi e le unità su ognuno di essi. Di solito si fissano unità della stessa grandezza.

Il sistema cartesiano determina i limiti dei tracciati dei grafici. Si deve tracciare il grafico fino alla fine del sistema cartesiano (se la funzione è definita in quell' intervallo).

I punti estremi delle funzioni seno e coseno devono essere considerati.

Il grafico deve rappresentare la funzione anche esteticamente: gli archi devono essere regolari, le concavità e le convessità rispettate, l'andamento della funzione attorno ai punti notevoli corretto (zeri, poli, intersezioni con gli assi cartesiani ...).

4. Disegni a mano libera

I disegni devono riportare tutte le grandezze che nel quesito rappresentano i dati noti, i risultati parziali e quelli finali. Per segnare lati, vertici, e spigoli delle figure geometriche e dei solidi valgono le regole convenzionali che sono riportate dai libri di testo usati.

Il disegno deve riportare le caratteristiche principali della figura geometrica o del solido che esso rappresenta. I simboli per le grandezze calcolate devono corrispondere a quelli riportati sul disegno o schizzo.

5. Quesiti che richiedono costruzioni geometriche

Questi quesiti si risolvono usando righello e compasso.

Bisogna sempre costruire tutte le (diverse) soluzioni che i dati a disposizione permettono. Prima si disegna uno schizzo sul quale vanno segnate tutte le grandezze, che devono corrispondere a quelle della costruzione. Se la posizione della figura non è definita la costruzione può iniziare in qualunque punto e può proseguire in qualunque direzione, purché l'intera costruzione rientri nel foglio d'esame.

Le costruzioni più complicate devono essere corredate da una breve descrizione del procedimento adottato.

6. Errori di distrazione, errori semplici ed errori gravi (indicazioni per i valutatori)

Sono considerati **errori di distrazione** quelli commessi per sbadataggine, per esempio uno sbaglio nel copiare un dato o un risultato intermedio.

Sono considerati **errori semplici** i risultati errati di operazioni numeriche, per es. $3 \cdot 7 = 18$ (non invece $2^3 = 6$), oppure imprecisioni nelle costruzioni geometriche e nei grafici delle funzioni (per es. l'inclinazione di una retta, la rotondità di una curva ...).

Errori gravi sono quelli che derivano dalla mancata conoscenza di una regola o di una legge, per es.:

$$2^3 = 6, \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{5}{8}, \log x + \log 3 = \log(x + 3), \sqrt{16 - x^2} = 4 - x.$$

Se un quesito vale n punti bisogna rispettare le seguenti regole:

- Per gli errori di distrazione oppure per gli errori semplici si toglie un punto.
- Se si commette un errore grave all'inizio il quesito viene valutato con 0 punti, altrimenti esso viene valutato fino all'errore grave (se sono previsti punti intermedi).
- Per i quesiti strutturati le regole qui menzionate vengono applicate per ogni singola parte del quesito.

6.5 ESAME ORALE

La lista delle domande e le schede per l'esame orale devono riflettere i contenuti del catalogo per l'esame di maturità professionale. Esse sono preparate dagli insegnanti titolari della materia e in servizio nella scuola in cui si svolge l'esame. La lista presenta separatamente le domande di teoria e le situazioni problematiche attinenti al profilo professionale del candidato oppure alla vita quotidiana. Ogni scheda contiene una situazione problematica e tre domande teoriche relative alla situazione problematica o riconducibili ad essa. Le domande devono riferirsi ad ambiti tematici diversi.

■ Esempi di schede per l'esame orale:

1° esempio di scheda:

La tariffa del tassista A è di 4 € per la corsa e di 1,50 € per ogni chilometro percorso. La tariffa del tassista B invece è di 2 € per la corsa e di 1,75 € per ogni chilometro percorso.

1. Descrivete le proprietà di una progressione aritmetica.

Scrivete la progressione aritmetica in cui il termine n -esimo corrisponde al costo del tassista A per una corsa di n chilometri. Ripetete l'operazione per il tassista B.

2. Descrivete le proprietà della funzione lineare e del suo grafico.

Scrivete le funzioni lineari che rappresentano rispettivamente la tariffa del tassista A e quella del tassista B.

Usando uno strumento tecnologico adeguato rappresentate i grafici di queste due funzioni lineari.

3. Spiegate come si risolve un sistema di due equazioni lineari a due incognite. Come si può interpretare geometricamente la soluzione del sistema?

Confrontate le tariffe dei due tassisti.

2° esempio di scheda:

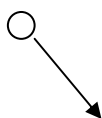
Una sfera di metallo avente massa 500 g e raggio 3 cm viene fatta rotolare su una superficie piana.

1. Descrivete le caratteristiche della funzione di secondo grado e del suo grafico. L'energia cinetica W_k di un corpo di massa m e velocità v è espressa dalla formula

$W_k = \frac{1}{2}mv^2$. Utilizzando uno strumento tecnologico adeguato rappresentate graficamente la variazione dell'energia cinetica della sfera in relazione alla variazione della sua velocità.

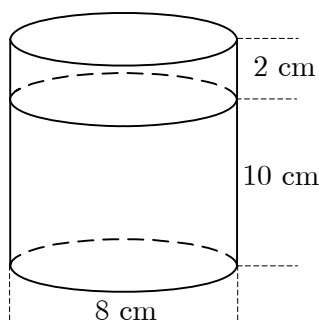
2. Quando due angoli sono congruenti, complementari, supplementari, consecutivi, adiacenti?

È possibile che la sfera disegnata a sinistra, dopo aver urtato la parete, colpisca l'altra sfera?



3. Calcola il volume del cilindro e il volume della sfera.

Nella figura è illustrato un cilindro contenente dell'acqua in cui viene immersa la sfera. È possibile che dopo l'immersione l'acqua fuoriesca dal bordo del cilindro? Motiva la risposta.



Valutazione dell'esame orale

Il candidato riceve in totale 30 punti, di cui almeno 10 per la situazione problematica, per saper collegare le domande teoriche alla situazione data e per l'uso appropriato degli strumenti tecnologici.

Vanno rispettati i seguenti criteri

- l'uso adeguato del linguaggio matematico nella comunicazione,
- l'adeguatezza di concetti matematici, procedimenti e strategie, relativi alla situazione problematica proposta,
- la scelta e l'esecuzione corretta dei procedimenti,
- il livello di astrazione, sistematicità, capacità deduttive dimostrate dall'allievo nella sua esposizione,
- l'uso adeguato di strumenti tecnologici,
- la motivazione della scelta di procedimenti, di strategie risolutive e la correttezza delle soluzioni.

Per i candidati che abbiano assolto i programmi in vigore fino all'anno 2004 incluso, nel 2011 possono affrontare l'esame orale di maturità professionale rispondendo a tre domande di una lista, riferite ad ambiti matematici diversi e ad obiettivi relativi a diverse tematiche.

Vanno rispettati i seguenti criteri:

- la correttezza delle risposte,
- l'uso adeguato del linguaggio matematico,
- l'argomentazione delle affermazioni,
- la formulazione di deduzioni,
- la comunicazione.

7. BIBLIOGRAFIA E MATERIALI CONSIGLIATI

Per prepararsi all'esame di maturità, i candidati possono usare libri di testo e altri materiali didattici, approvati dal Consiglio degli esperti per l'istruzione generale della Repubblica di Slovenia e indicati nel **Catalogo dei libri di testo per la scuola media**, pubblicato sulla pagina Web dell'Istituto dell'Educazione della Repubblica di Slovenia, all'indirizzo www.zrss.si.

PROGRAMMA PER L'ESAME DI MATURITÀ PROFESSIONALE – MATEMATICA

Titolo originale: PREDMETNI IZPITNI KATALOG ZA POKLICNO MATURO - MATEMATIKA

Il catalogo è stato compilato da:

Svjetlana Ćirković
Gregor Dolinar
Lovro Dretnik
Marjan Hafner
Draga Jan
Jože Pavlišič
Mira Jug Skledar
Mojca Šuban Ambrož
Majda Škrinar-Majdič

Traduzione in lingua italiana di:

Lilia Peterzol

Revisione per la lingua italiana:

dr. Sergio Crasnich

La versione originale in lingua slovena del programma è stata approvata dallo Strokovni svet Republike Slovenije za poklicno in strokovno izobraževanje (Consiglio degli Esperti della Repubblica di Slovenia per l'istruzione generale) durante la sua 118. esima seduta in data 10. 7. 2009 ed ha validità dalla sessione primaverile dell'anno 2011.

La validità del Programma per l'anno in cui il candidato deve sostenere l'esame di maturità è indicata nel Catalogo dell'esame di maturità professionale dell'anno in corso.

Edito e redatto dal

DRŽAVNI IZPITNI CENTER

Rappresentato da: **mag. Darko Zupanc**

Redattrice:

Joži Trkov

© Državni izpitni center.

Tutti i diritti sono riservati.

Impostazione grafica: Barbara Železnik Bizjak

Elaborazione al computer: Peter Tutta

Stampa: Državni izpitni center

Ljubljana 2009

Prezzo del catalogo: 4 EUR

ISSN: 1854-004X